

# MATEMATIKA

vyšší úroveň obtížnosti

MAIVD12C0T01

## DIDAKTICKÝ TEST

## ILUSTRAČNÍ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů  
Hranice úspěšnosti: 33 %

### 1 Základní informace k zadání zkoušky

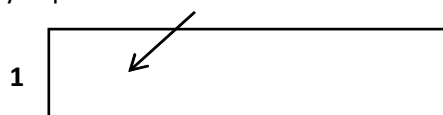
- Didaktický test obsahuje 23 úloh.
- Časový limit pro řešení didaktického testu je 120 minut.
- Povolené pomůcky: psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Za nesprávnou nebo neuvedenou odpověď se body neodečítají.
- Odpovědi píše do záznamového archu.
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–12) tvoří úlohy otevřené.
- Ve druhé části (úlohy 13–23) jsou uzavřené úlohy, které obsahují i nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je právě jedna odpověď správná.

### 2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte modrou nebo černou propisovací tužkou, která píše dostatečně silně a nepřerušovaně.
- U úloh, kde budete rýsovat obyčejnou tužkou, obtáhněte čáry a křivky následně propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu.

### 2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

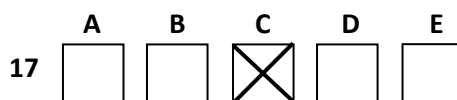
- Výsledky píše čitelně do vyznačených bílých polí.



- Je-li požadováno řešení, uveďte kromě výsledku celý postup řešení.
- Zápisy uvedené mimo vyznačená bílá pole nebudou hodnoceny.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapište správné řešení.

### 2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, zabarvíte pečlivě původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačíte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.
- Pokud zakřížkujete více než jedno pole, bude vaše odpověď považována za nesprávnou.

**Testový sešit neotvírejte, počkejte na pokyn!**

© Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání (CERMAT), 2012

Test i příslušný klíč správných řešení jsou do okamžiku uvolnění testu k volnému užití, tj. do 23. března 2012, určeny výhradně středním školám, a to pro účely zkušební testování jejich žáků ve škole. Jakékoli zveřejnění či užití obsahu tohoto testu či příslušného klíče správných řešení, jakož i kterékoli jejich části v rozporu s tímto určením, bude považováno za porušení zákona č. 121/2000 Sb. v platném znění (autorský zákon).

1 bod

- 1 Přirozené číslo  $n$  je dělitelné pěti. Totéž číslo  $n$  dává při dělení třemi zbytek 2.

**Určete nejmenší číslo  $k$ , které je třeba přičíst k číslu  $n$ , aby byl součet  $n + k$  dělitelný patnácti.**

---

1 bod

- 2 Platí:

$$z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

**Zapište v algebraickém tvaru komplexní číslo  $z^3$ .**

---

1 bod

- 3 Pro komplexní sdružená čísla  $z, \bar{z}$  platí:

$$z + \bar{z} = 4 \quad \wedge \quad z - \bar{z} = -i \cdot \sqrt{8}$$

**Zapište v algebraickém tvaru komplexní číslo  $z$ .**

1 bod

4 Pro  $x \in \mathbb{R}$  řešte:

$$\frac{(2x - 3)(x + 1)}{2 - 2x^2} = 0$$

---

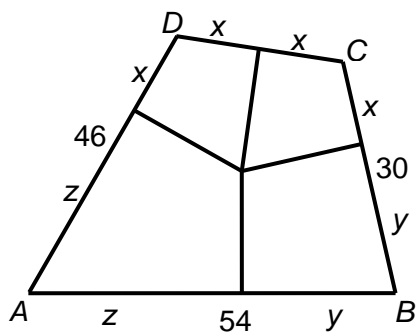
max. 2 body

5 Pro  $x \in \mathbb{R}$  řešte:

$$\frac{2x - 1}{x - 2} \leq \frac{x}{x - 2}$$

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 6

Ve čtyřúhelníku  $ABCD$  známe délky tří ze čtyř stran (30, 46 a 54). Čtyřúhelník je rozdělen na čtyři menší čtyřúhelníky (deltoidy), z nichž dva jsou shodné.



(CERMAT)

max. 2 body

6 Vypočtete délky vyznačených úseků  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOHÁM 7–8

Adam přečte celou knihu za  $d$  dnů. Kdyby denně přečetl o 6 stran více, knihu by dočetl o 2 dny dříve.

(CERMAT)

7 Vypočtete, kolik stran má kniha, jestliže  $d = 8$ .

max. 2 body

8 Vyjádřete počet stran ( $p$ ) knihy v závislosti na parametru  $d$ .

max. 2 body

max. 2 body

9 Pro  $x \in \mathbb{R}$  řešte:

$$\log_5(x + 4) + \log_5(3 - x) = \log_5(2 - x)$$

---

max. 2 body

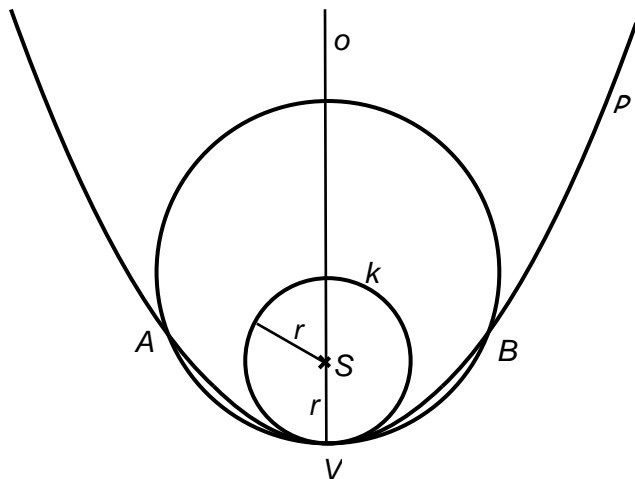
10 Pro  $k \in \mathbb{R}$  je dána uspořádaná trojice:

$$\left[ \frac{k-1}{2}; \frac{k+1}{3}; \frac{2k+1}{6} \right]$$

Vypočtěte, pro kterou hodnotu  $k$  tvoří uspořádaná trojice aritmetickou posloupnost.

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 11

Parabola  $p$  je určena rovnicí  $x^2 = 4y$ . Kružnice  $k$  má střed  $S$  na ose  $o$  ve vnitřní oblasti paraboly a prochází vrcholem  $V$  paraboly (poloměr kružnice je  $r = |SV|$ ). Kromě bodu  $V$  mohou existovat ještě další dva průsečíky  $A, B$  kružnice s parabolou.



(CERMAT)

max. 5 bodů

11

- 11.1 Vypočtete souřadnice průsečíků  $A, B$  kružnice s parabolou pro  $r = 4$ .
- 11.2 Vyjádřete souřadnice průsečíků  $A, B$  v závislosti na poloměru  $r$  a určete podmínky řešitelnosti ( $A \neq V; B \neq V$ ).

**V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.**

max. 4 body

**12** Je dán rovnoramenný trojúhelník  $ABC$ . Uvnitř základny  $AB$  leží bod  $M$ , pro nějž platí:

$$|\sphericalangle BMC| = \varphi = 30^\circ; |MB| = 3(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}; |MC| = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

- 12.1 Proved'te náčrtek situace.
- 12.2 Vypoč'tete výšku  $v_c$  na základnu  $AB$ .
- 12.3 Vypoč'tete obsah trojúhelníku  $ABC$ .

**V záznamovém archu** náčrtek **obtáhněte** propisovací tužkou a uveďte **postup řešení** úlohy.



max. 3 body

13 Je dán trojčlen  $x^3 + 2x^2 + k$  s proměnnou  $x \in \mathbf{R}$  a parametrem  $k \in \mathbf{R}$ .

**Ke každému z následujících dvojčlenů (13.1–13.3) najděte takovou hodnotu parametru  $k$  (A–E), aby byl daný trojčlen dělitelný dvojčlenem beze zbytku.**

13.1  $x + 2$  \_\_\_\_\_

13.2  $x + 1$  \_\_\_\_\_

13.3  $x - 1$  \_\_\_\_\_

A)  $k = -3$

B)  $k = -2$

C)  $k = -1$

D)  $k = 0$

E)  $k = 1$

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Balíček deseti karet obsahuje čtyři esa a karty 5, 6, 7, 8, 9 a 10.

(CERMAT)

max. 3 body

**14** Přiřadte ke každému jevu (14.1–14.3) pravděpodobnost (A–E), s níž může nastat.

14.1 Čtveřici náhodně vybraných karet tvoří po sobě jdoucí čísla. \_\_\_\_\_

14.2 Ve čtveřici náhodně vybraných karet není žádné eso. \_\_\_\_\_

14.3 Čtveřici náhodně vybraných karet tvoří dvě po sobě jdoucí čísla a dvě esa. \_\_\_\_\_

A)  $\frac{1}{7}$

B)  $\frac{1}{14}$

C)  $\frac{1}{21}$

D)  $\frac{1}{35}$

E)  $\frac{1}{70}$

## VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 15

V Kocourkově se jedenkrát za 5 let vyhlašuje „Kolotoč“. V tento den všichni občané ve věku 61-65 let přestávají pracovat a odcházejí do důchodu a všichni občané ve věku 21–26 let jdou do zaměstnání.

Věková skupina	Počet obyvatel					
	před Kolotočem			po Kolotoči		
	nepracující	pracující	důchodci	nepracující	pracující	důchodci
66 let a více			1 400			1 400
61–65 let		400				400
27–60 let		5 200			5 200	
21–26 let	200				200	
20 let a méně	1 600			1 600		

Každý pracující odvádí měsíčně 200 kocourkovských zlaťáků (KZ) na důchody svých spoluobčanů. Všechny vybrané peníze se rozdělí na důchody.

(CERMAT)

**2 body**

**15 Jak se změní průměrný měsíční plat důchodce po uskutečnění uvedeného Kolotoče?**

- A) klesne o 200 KZ
- B) klesne o 100 KZ
- C) nezmění se
- D) vzroste o 100 KZ
- E) změní se o jinou částku

## VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

Jedno balení čokolády stojí 20 Kč. Uvnitř každého balení je jedna čokoláda a prémiový kupón. Po předložení tří prémiových kupónů dostane zákazník zdarma jedno další balení čokolády.

(CERMAT)

**2 body**

**16** Jaký největší počet čokolád lze postupně získat za 300 Kč?

- A) 15
- B) 20
- C) 21
- D) 22
- E) jiný počet

---

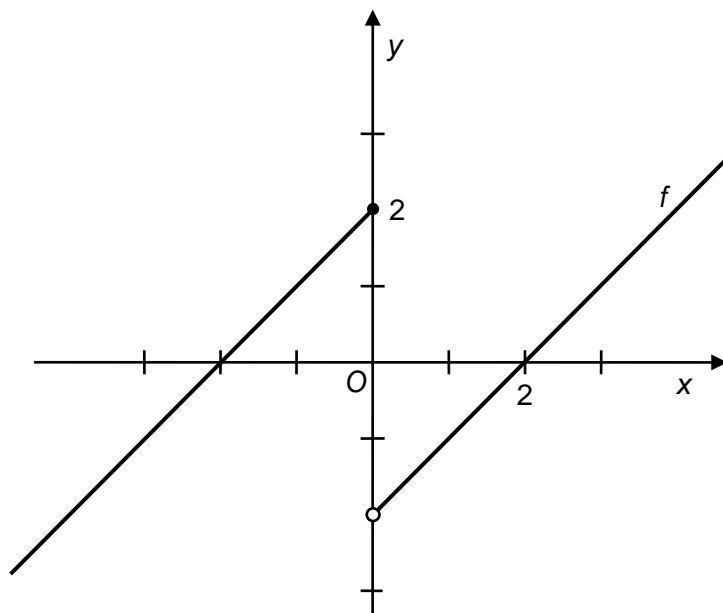
**2 body**

**17** Výraz  $(0,5 \cdot \cotg 2x)$  je možné vypočítat pro všechny reálné hodnoty  $x$  kromě hodnot:

- A)  $k \cdot \pi$ , kde  $k \in \mathbf{Z}$
- B)  $k \cdot \frac{\pi}{2}$ , kde  $k \in \mathbf{Z}$
- C)  $(2k + 1) \cdot \frac{\pi}{4}$ , kde  $k \in \mathbf{Z}$
- D)  $(2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$ , kde  $k \in \mathbf{Z}$
- E)  $(2k + 1) \cdot \pi$ , kde  $k \in \mathbf{Z}$

### VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 18

V kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  je umístěn graf funkce  $f$ , jejíž definiční obor je  $\mathbf{R}$ .



(CERMAT)

**max. 2 body**

**18** Hodnoty funkce  $g$  jsou druhými mocninami hodnot funkce  $f$ , tedy platí:

$$g: y = f^2(x)$$

**Jaký předpis má funkce  $g$ ?**

- A)  $y = x^2 + |4x - 4|$
- B)  $y = x^2 - 4|x| + 4$
- C)  $y = |x - 2|(x + 2)$
- D)  $y = |x + 2|(x - 2)$
- E)  $y = |x^2 - 4x| + 4$

**2 body**

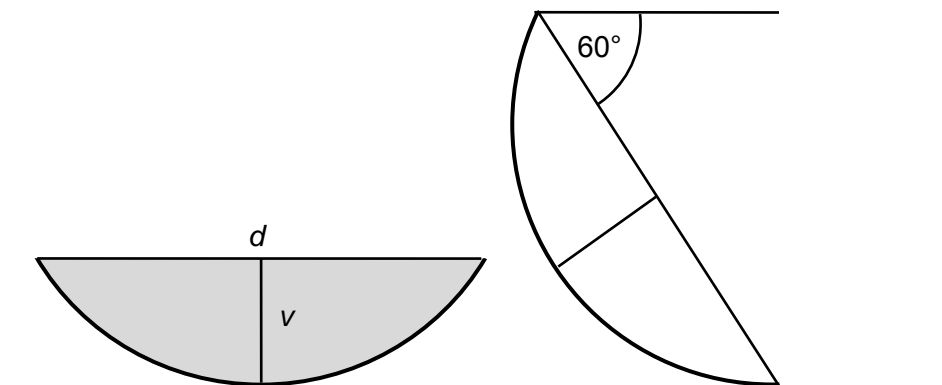
- 19 Přímka  $q$  prochází body  $A[-25; 30]$  a  $B[-10; 10]$ . Přímka  $p$  je obrazem přímky  $q$  v posunutí určeném vektorem  $\vec{u} = (-3; 4)$ .

**Jaká je vzdálenost přímek  $p, q$ ?**

- A) větší než 5
- B) 5
- C) nenulová vzdálenost menší než 5
- D) 0
- E) Nelze určit, přímky jsou různoběžné.

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 20

Umyvadlo má tvar kulové úseče s výškou  $v = 15$  cm. Aby z umyvadla vytekla všechna voda, musí být nakloněno nejméně o  $60^\circ$ .



(CERMAT)

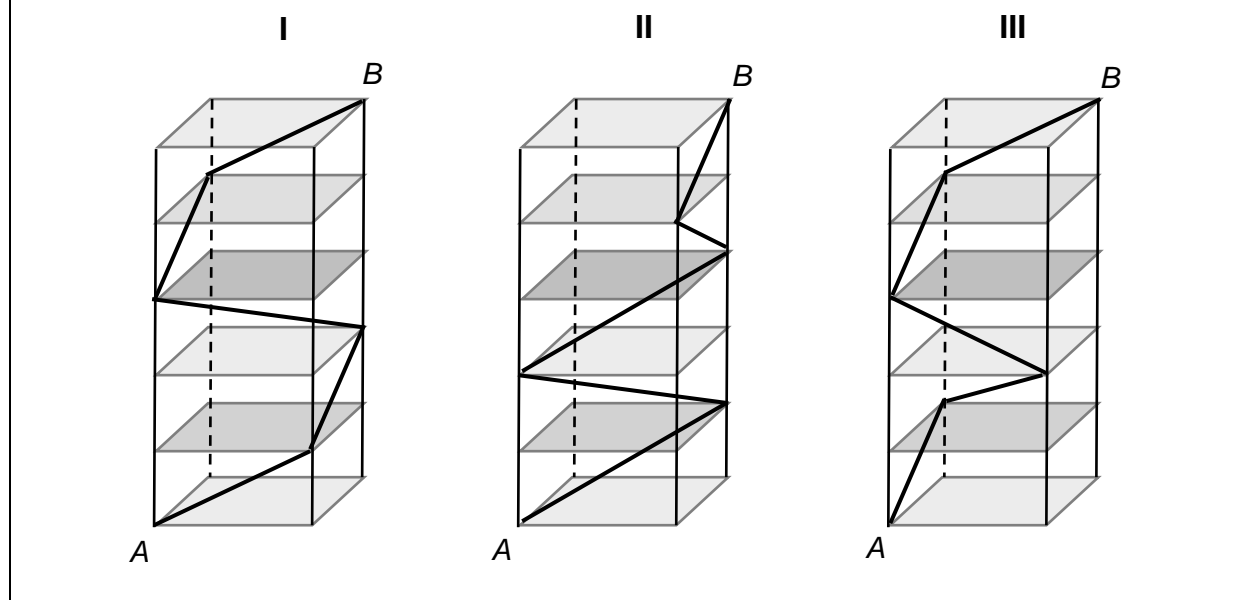
2 body

20 Jaký je vnitřní průměr  $d$  nejširší části umyvadla vypočtený s přesností na mm?

- A) 48,0 cm
- B) 50,0 cm
- C) 52,0 cm
- D) 96,0 cm
- E) 112,0 cm

## VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Ve Škole čar a kouzel v Bradavicích se každou hodinu mění nastavení chodby, která vede z místa *A* v přízemí do místa *B* v pátém patře. Patra mají čtvercový půdorys a jsou od sebe stejně vzdálena.



(CERMAT)

2 body

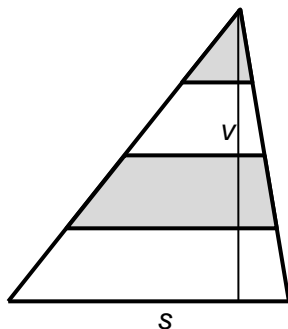
21 Při kterém nastavení chodby je cesta mezi místy *A* a *B* nejkratší?

- A) pouze při nastavení I
- B) pouze při nastavení II
- C) pouze při nastavení III
- D) při nastavení I a II
- E) při nastavení I a III



## VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 22

Obvod trojúhelníku je  $o$ . Trojúhelník je rozdělen třemi úsečkami rovnoběžnými se stranou  $s$  na čtyři rovinné útvary (jeden trojúhelník a tři lichoběžníky). Velikosti výšek jsou ve všech útvarech shodné  $\left(= \frac{v}{4}\right)$ .



(CERMAT)

2 body

22 Obvody  $(o_1, o_2, o_3, o_4)$  jednotlivých útvarů tvoří rostoucí posloupnost.

Jaký je rekurentní vztah pro členy této posloupnosti, kde  $n \in \{1; 2; 3\}$ ?

A)  $o_1 = \frac{3}{8} o, o_{n+1} = o_n + \frac{1}{4} s$

B)  $o_1 = \frac{1}{8} o, o_{n+1} = 2o_n$

C)  $o_1 = \frac{1}{4} o, o_{n+1} = o_n + \frac{1}{2} s$

D)  $o_1 = \frac{1}{4} o, o_{n+1} = \frac{n+1}{n} o_n$

E) žádný z uvedených

max. 3 body

23 V geometrické posloupnosti  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  s kvocientem  $q$  platí  $a_n = 2^{10-2n}$ .

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (23.1–23.3), zda je pravdivé (ANO), či nikoli (NE).

	A	N
23.1 $a_5 = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
23.2 $a_6 = q$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
23.3 $s = a_1 + a_2 + a_3 + \dots < 2^9$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

---

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.

---