MATEMATIKA ROZŠIŘUJÍCÍ

MXMVD21C0T01

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

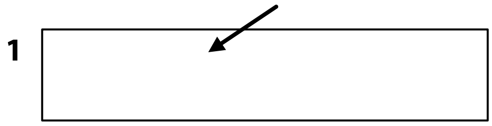
- **Didaktický test** obsahuje **22 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulátor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi pište do záznamového archu.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–11) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 12–22) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** píšící propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

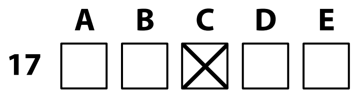
- Výsledky **pište čitelně** do vyznačených bílých polí.



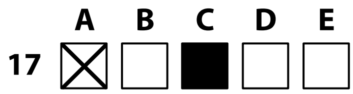
- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapište správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvěte původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

1 bod

1 **Výraz s proměnnou $x \in \mathbf{R}$ rozložte na součin lineárních dvojčlenů.**

$x^3 - 3x^2 - x + 3 =$

Řešení:

$x^3 - 3x^2 - x + 3 = x^2 \cdot (x-3) - 1 \cdot (x-3) = (x-3)(x^2-1) = (x-3)(x-1)(x+1)$

---

1 bod

2 Jestliže mnohočlen $P(x)$ s proměnnou $x \in \mathbf{R}$ vydělíme trojčlenem $(x^2 + x + 2)$, dostaneme neúplný podíl $(x-2)$ a zbytek (-4).

Určete mnohočlen $P(x)$.

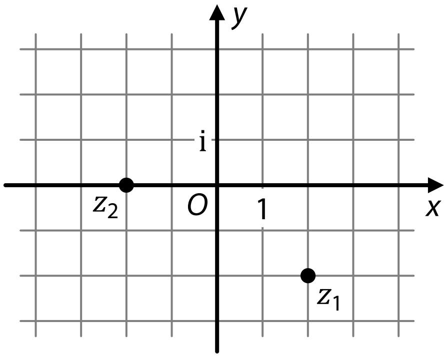
Řešení:

$P(x) = (x^2 + x + 2) \cdot (x-2) + (-4) = x^3 - x^2 - 8$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 3

V Gaussově rovině jsou (v mřížových bodech) zobrazena komplexní čísla z_1 a z_2.

Platí: $z = z_1 : z_2$.



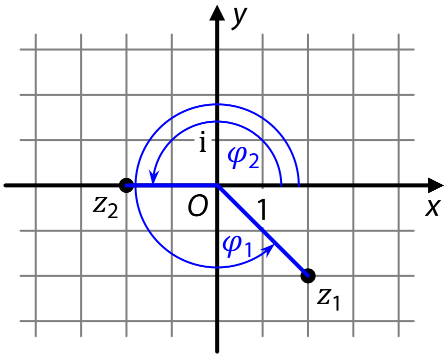
(CZVV)

1 bod

3 **Zapište číslo z v goniometrickém tvaru tak, aby jeho argument φ byl z intervalu $\langle 0; 2\pi)$.**

Řešení:

Z obrázku určíme absolutní hodnoty a argumenty zadaných čísel z_1, z_2 a čísla zapíšeme v goniometrickém tvaru:



$z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1) = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{11\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{4}\right)$

$z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$

Vypočteme číslo z:

$$z = z_1 : z_2 = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$z = \frac{2\sqrt{2}}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{11\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \boldsymbol{\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)}$$

Jiný způsob řešení:

Z obrázku získáme zadaná čísla z_1 a z_2 v algebraickém tvaru a vypočteme jejich podíl z:

$z_1 = 2 - 2\mathrm{i}, \qquad z_2 = -2$

$$z = z_1 : z_2 = \frac{2 - 2\mathrm{i}}{-2} = -1 + \mathrm{i}$$

Číslo z převedeme do goniometrického tvaru:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$z = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)$$

Argument φ čísla z má být z intervalu $\langle 0; 2\pi)$:

$$\cos\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \wedge \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \wedge \quad \varphi \in \langle 0; 2\pi) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{5\pi}{4}$$

$$z = \boldsymbol{\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 4

Výrobní družstvo vyrobilo sadu stejných sekaček, každou s týmiž náklady na její výrobu. Polovinu sekaček družstvo prodalo za cenu o 70 % vyšší, než byly náklady na jejich výrobu. Každou další sekačku družstvo prodává za cenu o 50 % vyšší, než byly náklady na její výrobu.

Přestože družstvo ještě neprodalo všechny sekačky, peníze získané za prodané sekačky již nyní přesně pokryly náklady na výrobu celé sady sekaček.

(CZVV)

max. 3 body

4 Vypočtěte, kolik procent všech vyrobených sekaček již družstvo prodalo.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

Počet všech sekaček v sadě označíme s, náklady na výrobu jedné sekačky n ($s > 0$, $n > 0$).

Náklady na výrobu celé sady sekaček: ns
Tržby z prodeje první poloviny sekaček: $1{,}7n \cdot 0{,}5s = 0{,}85ns$

Prodej první poloviny sekaček pokryl výrobní náklady celé sady z 85 %, družstvo tedy ze zbylých sekaček muselo prodat ještě tolik kusů, aby jejich prodejem pokrylo zbývajících 15 % výrobních nákladů celé sady, tj. $0{,}15ns$.

Počet sekaček prodaných za cenu o 50 % vyšší než náklady na výrobu: $\dfrac{0{,}15ns}{1{,}5n} = 0{,}1s$

Počet všech prodaných sekaček: $0{,}5s + 0{,}1s = 0{,}6s$, tj. 60 % všech sekaček v sadě

Družstvo již prodalo 60 % všech vyrobených sekaček.

Jiný způsob řešení:

Náklady na výrobu celé sady sekačky označíme N ($N > 0$).
Podíl všech prodaných sekaček na počtu všech vyrobených sekaček označíme x.
Protože družstvo prodalo více než polovinu vyrobených sekaček, platí $x \in (0{,}5; 1\rangle$.

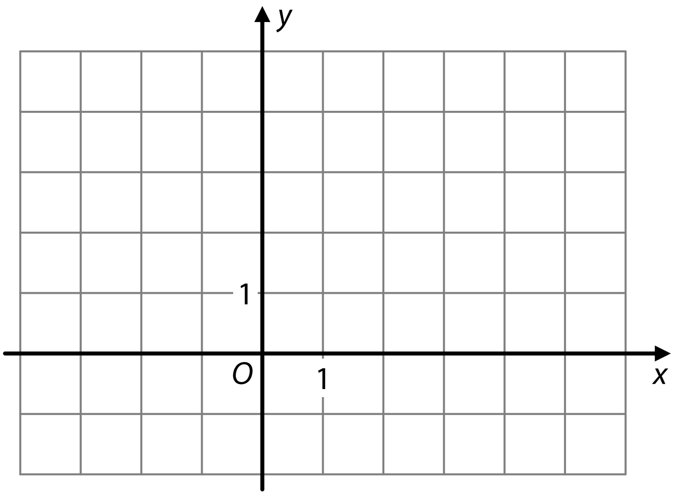
Tržby z prodeje sekaček se rovnají nákladům na výrobu celé sady:

$$\begin{aligned} 1{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot N + 1{,}5 \cdot (x - 0{,}5) \cdot N &= N \\ 0{,}85 + 1{,}5x - 0{,}75 &= 1 \\ 1{,}5x &= 0{,}9 \\ x &= 0{,}6 \end{aligned}$$

Družstvo již prodalo 60 % všech vyrobených sekaček.

VÝCHOZÍ TEXT, OBRÁZEK A TABULKA K ÚLOZE 5

Pro všechna $x \in \mathbf{R}$ je dána funkce $f: y = a^x$, kde $a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$ a pro kterou platí:
$a^{x+2} = 2 \cdot a^x$



x	-2	0	2	4
a^x		1		

(CZVV)

max. 2 body

5

5.1 Zakreslete graf funkce f v kartézské soustavě souřadnic Oxy a vyznačte v grafu všechny body, jejichž x-ové souřadnice jsou uvedeny v tabulce (chybějící y-ové souřadnice dopočtěte).

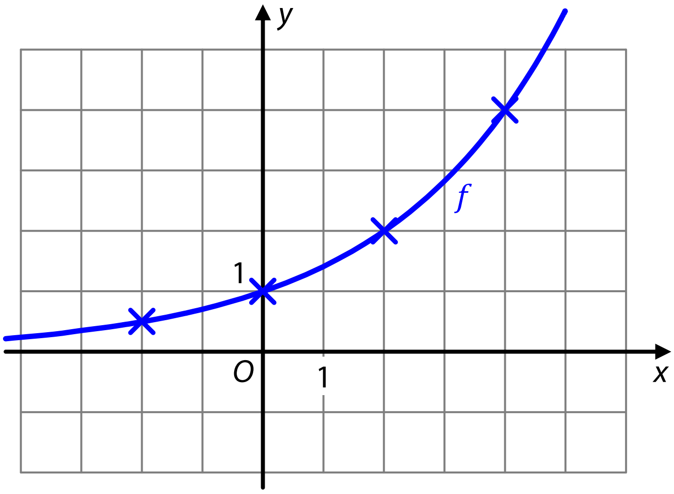
V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

Řešení:

Ze známé hodnoty $a^0 = 1$ získáme opakovaným užitím vztahu $a^{x+2} = 2 \cdot a^x$ hodnoty funkce f v dalších bodech:

x	0	2	4		0	-2
a^x	$a^0 = 1$	$a^{0+2} = 2 \cdot a^0$ $a^2 = 2 \cdot 1$ $a^2 = 2$	$a^{2+2} = 2 \cdot a^2$ $a^4 = 2 \cdot 2$ $a^4 = 4$		$a^0 = 1$ $a^{-2+2} = 2 \cdot a^{-2}$	$2 \cdot a^{-2} = a^0$ $a^{-2} = \frac{a^0}{2}$ $a^{-2} = \frac{1}{2}$

x	-2	0	2	4
a^x	0,5	1	2	4



Do soustavy souřadnic zakreslíme body, jejichž souřadnice jsou v tabulce, a proložíme jimi graf exponenciální funkce $f\colon y = a^x$.

5.2 Vypočtěte hodnotu $f(1)$.

Řešení:

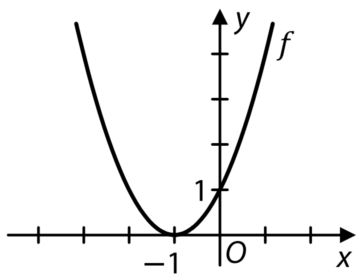
$$a^{x+2} = 2 \cdot a^x, \qquad a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$$
$$a^x \cdot a^2 = 2 \cdot a^x$$
$$a^2 = 2$$
$$a = \sqrt{2}$$

$$f(1) = a^1 = a = \boldsymbol{\sqrt{2}}$$

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 6

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* je sestrojen graf kvadratické funkce f s definičním oborem **R**.

Pro funkci g platí: $g(x) = -f(x+2)$.



(CZVV)

max. 2 body

6

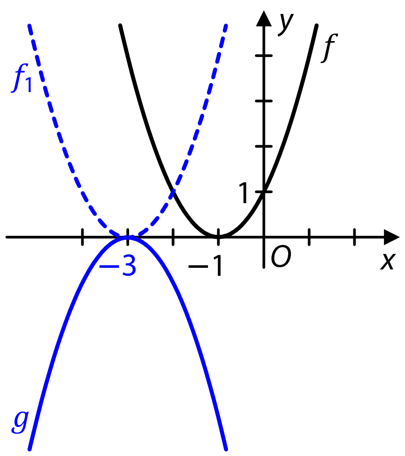
6.1 Definiční obor funkce g lze zapsat jako sjednocení ($I_1 \cup I_2$) takových dvou intervalů, že v každém z nich je funkce g monotónní.

Z obou těchto intervalů zapište ten interval, v němž je funkce g klesající.

Řešení:

Sestrojíme graf funkce g:

1. Posunutím grafu funkce f o 2 jednotky ve směru záporné poloosy *x* získáme graf funkce f_1: $f_1(x) = f(x+2)$
2. Graf funkce g je potom obrazem grafu funkce f_1 v osové souměrnosti podle souřadnicové osy *x*: $g(x) = -f_1(x) = -f(x+2)$



Z grafu je patrné, že
funkce g je klesající v intervalu $\mathbf{\langle -3; +\infty)}$,
zatímco ve zbytku definičního oboru je rostoucí.
Hodnotu (-3) lze přiřadit do kteréhokoli z intervalů I_1, I_2.

6.2 Určete souřadnice průsečíku *Y* grafu funkce g se souřadnicovou osou *y*.

Řešení:

Průsečík grafu funkce g se souřadnicovou osou *y* je bod o souřadnicích $[0; g(0)]$.
Z grafu funkce g lze nahlédnout její předpis $g: y = -(x+3)^2$.

$g(0) = -(0+3)^2 = -9$, $\quad$ $\boldsymbol{Y[0; -9]}$

případně

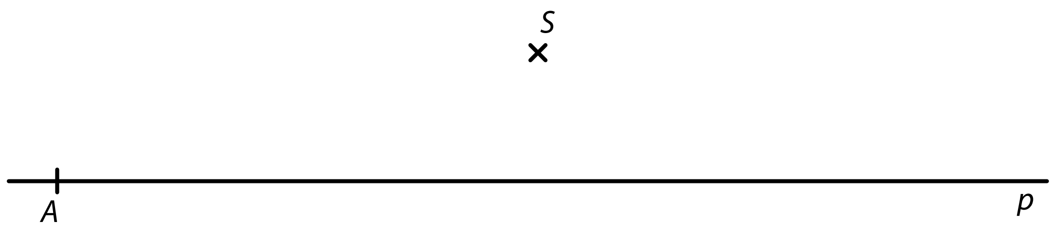
$g(0) = -f(0+2) = -f(2)$

Graf funkce f je posunutím grafu funkce $y = x^2$ o 1 jednotku ve směru záporné poloosy *x*, tedy $f(2) = 9$.

$g(0) = -f(2) = -9$, $\quad$ $\boldsymbol{Y[0; -9]}$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

V rovině leží body A, S. Bodem A prochází přímka p.



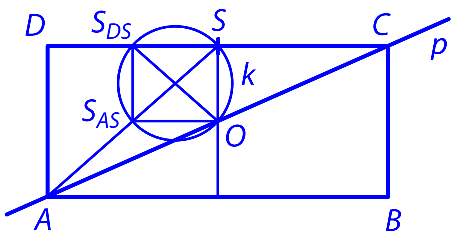
(*CZVV*)

max. 3 body

7 Bod A je vrchol obdélníku $ABCD$. Na přímce p leží ještě vrchol C obdélníku. Bod S je střed strany CD obdélníku $ABCD$.

7.1 Hledáme vrcholy B, C, D obdélníku $ABCD$.
Proveďte náčrtek obdélníku $ABCD$ a zapište rozbor nebo postup konstrukce.

Řešení:



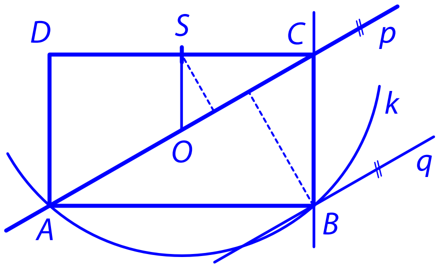
Hledáme střed O obdélníku $ABCD$:

1. $O \in p \quad \wedge \quad O \in k$,
   kde k je kružnice opsaná obdélníku $OSS_{DS}S_{AS}$

Hledáme body C, D, B:

2. $\mathcal{S}(O): A \longrightarrow C$
3. $\mathcal{S}(S): C \longrightarrow D$
4. $\mathcal{S}(O): D \longrightarrow B$

Jiný způsob řešení:



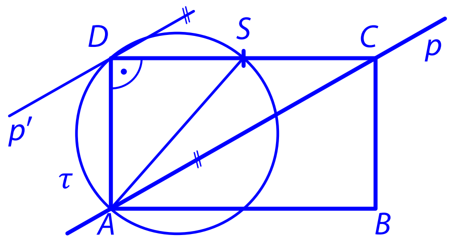
Hledáme bod B:

1. $B \in k(S; SA) \quad \wedge \quad B \in q$,
   kde $q \parallel p \quad \wedge \quad |pq| = 2|Sp| \quad \wedge \quad q \not\subset \mapsto pS$,
   resp. $\mathcal{H}(S; 3): p \longrightarrow q$,
   protože $\triangle ABC \sim \triangle CSO$ (O je střed obdélníku $ABCD$)

Hledáme body C, D:

2. $C \in p \quad \wedge \quad \leftrightarrow BC \perp \leftrightarrow AB$
3. Bod D je chybějícím vrcholem obdélníku $ABCD$.

Ještě jiný způsob řešení:



Hledáme bod D:

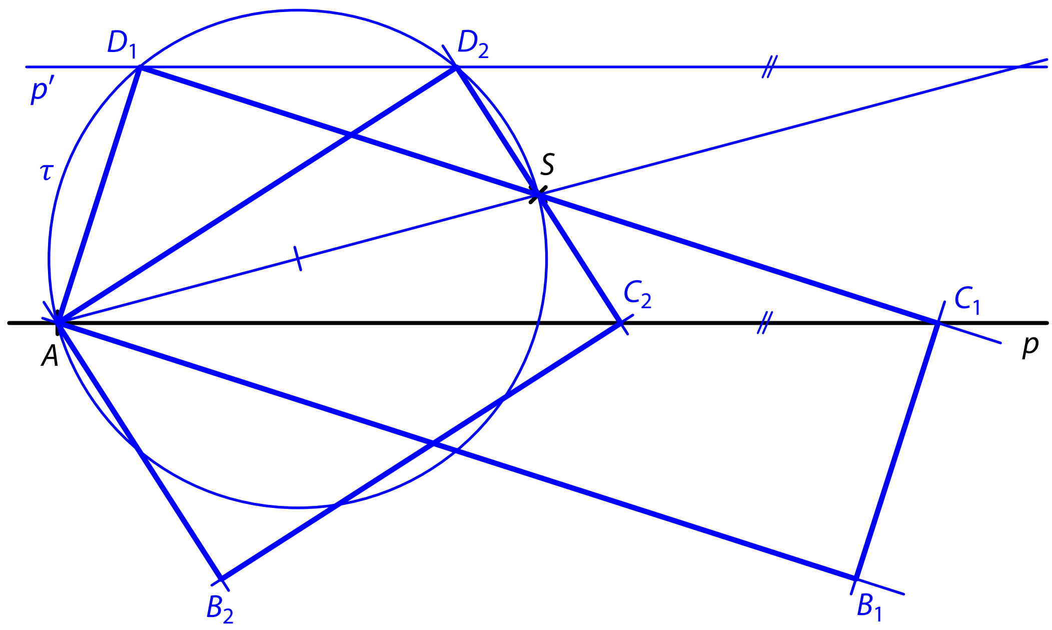
1. $D \in \tau(AS) \quad \wedge \quad D \in p'$, kde $\mathcal{S}(S): p \longrightarrow p'$,
   protože $C \in p \quad \wedge \quad \mathcal{S}(S): C \longrightarrow D$

Hledáme body C, B:

2. $\mathcal{S}(S): D \longrightarrow C$
3. Bod B je chybějícím vrcholem obdélníku $ABCD$.

7.2 V obrázku sestrojte chybějící vrcholy obdélníku *ABCD* a obdélník narýsujte. Najděte všechna řešení.

Řešení (dle rozboru v posledním způsobu řešení úlohy 7.1)**:**



Popis konstrukce:

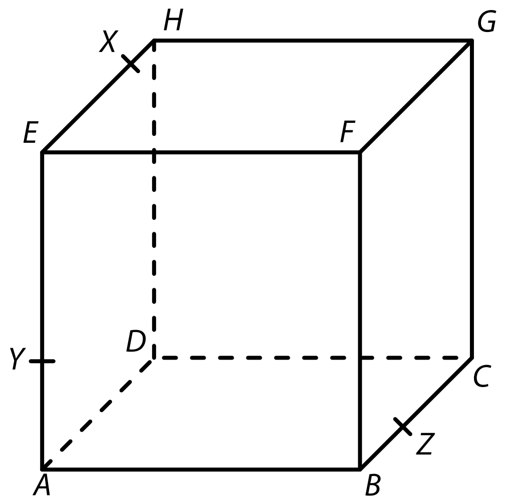
1. $\tau; \tau(AS)$
2. $p'; \mathcal{S}(S): p \longrightarrow p'$
3. $D; \{D\} = \tau \cap p'$
4. $C; \mathcal{S}(S): D \longrightarrow C$
5. $B; \leftrightarrow AB \parallel \leftrightarrow CD \wedge \leftrightarrow BC \parallel \leftrightarrow AD$
6. obdélník $ABCD$

Závěr: Úloha má 2 řešení.

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

V krychli *ABCDEFGH* leží bod *X* na hraně *EH*, bod *Y* leží na hraně *AE* a bod *Z* na hraně *BC*.



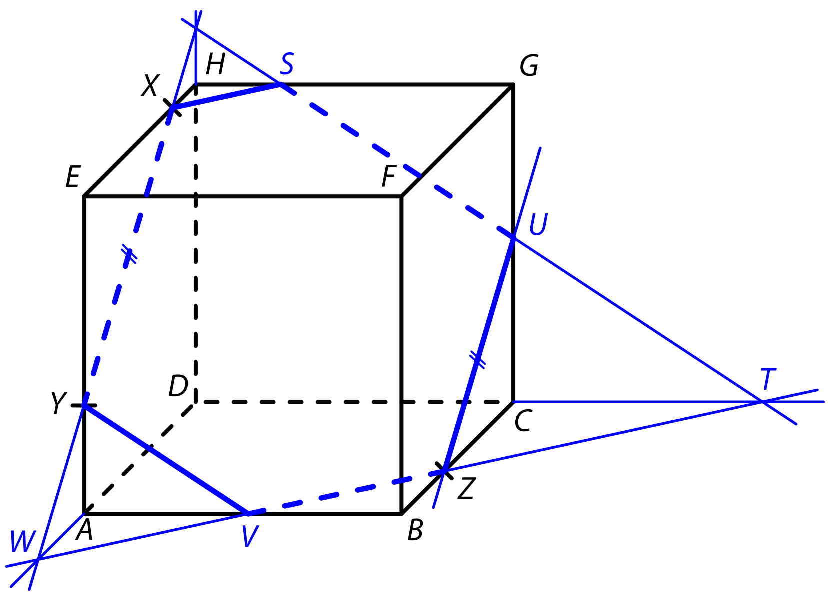
(*CZVV*)

max. 2 body

8 **Sestrojte řez krychle** *ABCDEFGH* **rovinou** *XYZ***.**

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

Řešení:



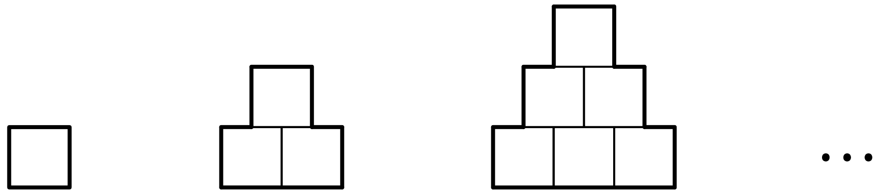
Popis konstrukce:

1. $W; \{W\} = \leftrightarrow XY \cap \leftrightarrow DA$
2. $V; \{V\} = \leftrightarrow WZ \cap AB$
3. $U; U \in CG \wedge \leftrightarrow ZU \parallel \leftrightarrow AB$
4. $T; \{T\} = \leftrightarrow WZ \cap \leftrightarrow DC$
5. $S; \{S\} = \leftrightarrow TU \cap GH$
6. šestiúhelník *XYVZUS*

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 9

Na obrázku jsou nakresleny tři obrazce složené ze čtverců o straně délky 1 cm.

Za těmito obrazci následují další. Obrazec s pořadovým číslem $n > 1$ se vytvoří z předchozího obrazce přidáním spodní řady, která obsahuje n čtverců.



1. obrazec 2. obrazec 3. obrazec

(*CZVV*)

max. 3 body

9 Jeden z obrazců je složen z 210 čtverců.

9.1 Vypočtěte, kolikátý je tento obrazec.

Řešení:

Počet všech čtverců v n-tém obrazci označíme s_n.
Počet čtverců v jednotlivých řadách n-tého obrazce roste shora po jedné od 1 do n.
Počet s_n je tedy součtem prvních n členů aritmetické posloupnosti všech přirozených čísel.

$s_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n+1), \qquad s_n = 210$

$\frac{n}{2}(n+1) = 210, \qquad n \in \mathrm{N}$

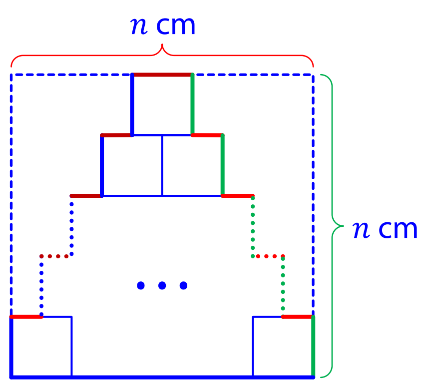
$n(n+1) = 420$ tj. součin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel ($20 \cdot 21 = 420$)

$n = 20$

Obrazec složený z 210 čtverců je 20. v pořadí.

9.2 Vypočtěte v cm obvod tohoto obrazce.

Řešení:



n-tý obrazec

V n-tém obrazci je n řad čtverců,
spodní (nejdelší) řada obsahuje n čtverců.
Každý čtverec má stranu délky 1 cm.

Při pohledu shora mají všechny vodorovné strany obrazce dohromady stejnou délku jako nejdelší vodorovná strana, tj. n cm.

Při pohledu zprava mají všechny svislé strany obrazce dohromady délku n cm, stejně tak zleva.

Obvod n-tého obrazce:

$o_n = 4 \cdot n$ cm, $\qquad n = 20$ (viz řešení úlohy 9.1)

$o_{20} = 4 \cdot 20$ cm $= 80$ cm

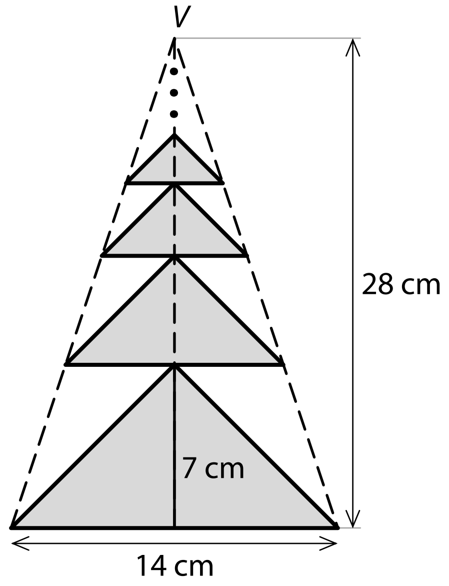
V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

Šedý obrazec je složen z nekonečně mnoha rovnoramenných trojúhelníků. Každé dva sousední trojúhelníky mají právě jeden společný bod a jsou obrazem a vzorem ve stejnolehlosti se středem *V*. Na obrázku jsou zakresleny pouze 4 trojúhelníky.

V největším trojúhelníku má základna délku 14 cm a výška na základnu velikost 7 cm.

Výška celého obrazce je 28 cm.



(*CZVV*)

max. 3 body

10 Vypočtěte v cm^2 obsah šedého obrazce.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

U všech délek, resp. obsahů, pracujeme pouze s číselnými hodnotami v cm, resp. v cm^2.

V největším šedém trojúhelníku označíme délku základy a_1, výšku v_1 a obsah S_1.
Výšku celého šedého obrazce označíme v, obsah obrazce S.

$a_1 = 14, \qquad v_1 = 7, \qquad v = 28$

Všechny šedé trojúhelníky v obrazci jsou navzájem podobné, přitom každé dva sousední mají týž koeficient podobnosti $k < 1$ (k je koeficient stejnolehlosti sousedních trojúhelníků).

Velikosti výšek všech šedých trojúhelníků (zdola) tvoří nekonečnou geometrickou posloupnost $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem k. Výšku celého obrazce získáme jako součet nekonečné geometrické řady vytvořené ze členů této posloupnosti.

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_1 k^{n-1} = \frac{v_1}{1-k}$$

$$k = 1 - \frac{v_1}{v} = 1 - \frac{7}{28} = \frac{3}{4}$$

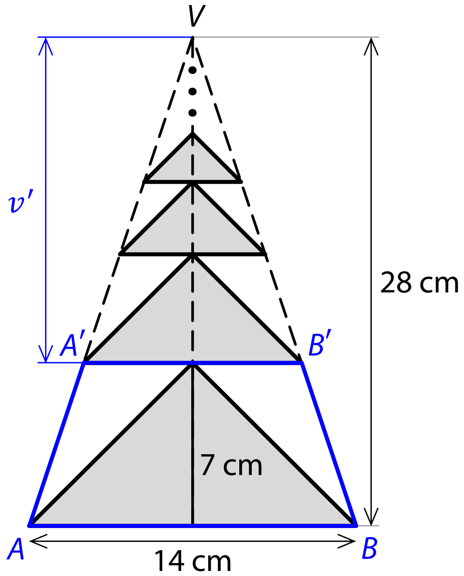
Obsahy trojúhelníků (zdola) tvoří geometrickou posloupnost $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem k^2. Obsah šedého obrazce získáme jako součet nekonečné geometrické řady vytvořené ze členů této posloupnosti.

$$S_1 = \frac{a_1 v_1}{2} = \frac{14 \cdot 7}{2} = 49, \qquad k^2 = \frac{9}{16}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} S_1 (k^2)^{n-1} = \frac{S_1}{1-k^2} = \frac{49}{1-\frac{9}{16}} = 112$$

případně

Trojúhelník $A'B'V$ je podobný trojúhelníku ABV s koeficientem podobnosti k.
Velikost výšky na základnu $A'B'$ označíme v'.



$$k = \frac{v'}{v}, \qquad v' = v - v_1$$

$$k = \frac{v - v_1}{v}$$

$$k = \frac{28-7}{28} = \frac{3}{4}$$

Poměr obsahu S_1 největšího šedého trojúhelníku ku obsahu lichoběžníku $ABA'B'$ je stejný jako poměr obsahu S celého šedého obrazce ku obsahu trojúhelníku ABV (součet obsahů všech lichoběžníků).

$$\frac{S}{S_{ABV}} = \frac{S_1}{S_{ABA'B'}}$$

Lichoběžník $ABA'B'$ má základny délek a_1, a_2 a výšku v_1.

$$S_{ABA'B'} = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot v_1, \qquad a_2 = k a_1$$

$$\frac{S_1}{S_{ABA'B'}} = \frac{\frac{a_1 v_1}{2}}{\frac{a_1 + k a_1}{2} \cdot v_1} = \frac{1}{1+k} = \frac{S}{S_{ABV}}$$

$$S = S_{ABV} \cdot \frac{1}{1+k}$$

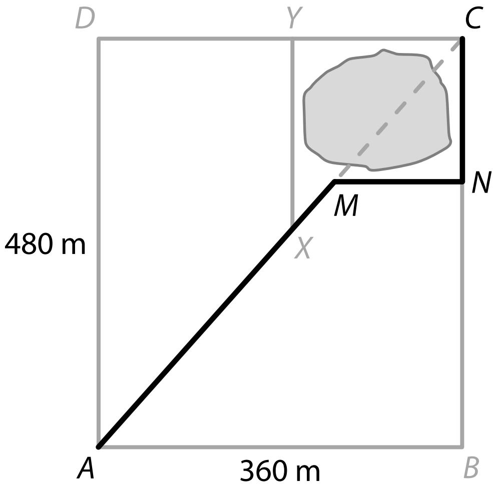
$$S = \frac{a_1 v}{2} \cdot \frac{1}{1+k} = \frac{14 \cdot 28}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = 196 \cdot \frac{4}{7} = 112$$

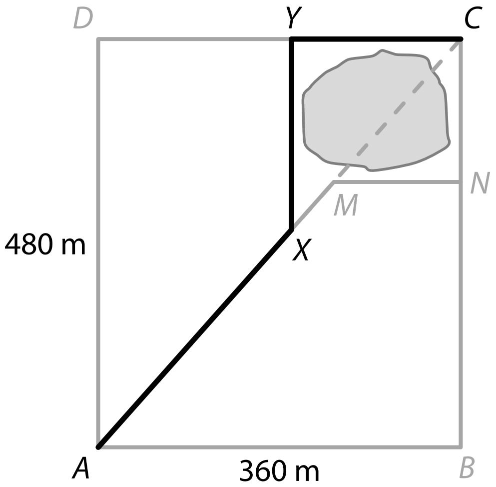
Obsah šedého obrazce je 112 cm^2.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 11

Obdélníkový pozemek *ABCD* má rozměry 360 m a 480 m. Uvnitř pozemku je rybníček.

První cestu mezi protějšími rohy pozemku představuje lomená čára *AMNC*, druhou cestu lomená čára *AXYC*. Oba body *X*, *M* leží na úhlopříčce *AC*, body *N*, *Y* na stranách obdélníku a úsečky *MN*, *XY* jsou rovnoběžné se stranami obdélníku.





(CZVV)

max. 4 body

11

11.1 U první cesty tvoří délka úsečky *AM* dvě třetiny délky úhlopříčky *AC*.

Vypočtěte, v jakém poměru je délka úsečky *AM* ku délce lomené čáry *MNC*.

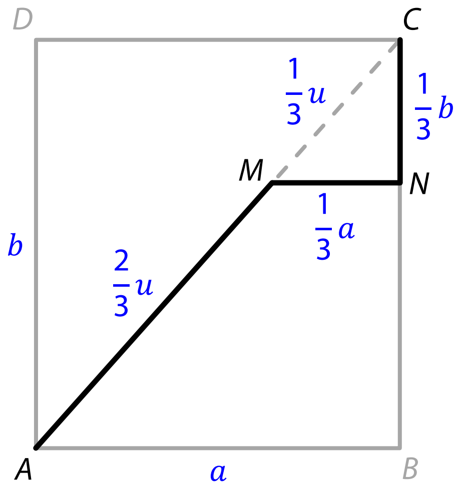
Řešení:

Délky stran *AB*, *BC* pozemku označíme a, b a délku úhlopříčky *AC* označíme u.

$|AB| = a = 360$ m, $\quad |BC| = b = 480$ m,

$|AC| = u = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{360^2 + 480^2}$ m $= 600$ m,

$|AM| = \frac{2}{3}u = 400$ m, $\quad |MC| = \frac{1}{3}u$



Trojúhelník *MNC* je podobný trojúhelníku *ABC* (podle věty uu) s koeficientem podobnosti $\frac{1}{3}$:

$|MN| = \frac{1}{3}a = 120$ m

$|NC| = \frac{1}{3}b = 160$ m

Délka lomené čáry *MNC* je součet délek úseček *MN* a *NC*, tedy 280 m.

$$\frac{|AM|}{|MN| + |NC|} = \frac{400}{280} = 10 : 7$$

Délka úsečky *AM* ku délce lomené čáry *MNC* je v poměru 10 : 7.

11.2 U druhé cesty je délka úsečky *AX* stejná jako délka lomené čáry *XYC*.

Vypočtěte v metrech délku lomené čáry *AXYC* představující druhou cestu.

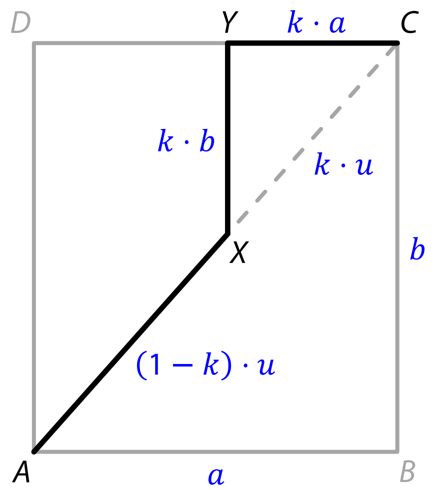
Řešení:

Užijeme značení z řešení úlohy 11.1.

Trojúhelník *CYX* je podobný trojúhelníku *ABC* (podle věty uu) s koeficientem podobnosti k:

$|XC| = k \cdot u, \qquad |XY| = k \cdot b, \qquad |YC| = k \cdot a$

$|AX| = u - ku = (1 - k) \cdot u$



Délka úsečky *AX* je rovna délce lomené čáry *XYC*, tj. součtu délek úseček *XY* a *YC*:

$$|AX| = |XY| + |YC|$$
$$(1 - k) \cdot u = k \cdot b + k \cdot a$$
$$u - k \cdot u = k \cdot b + k \cdot a$$
$$u = k(a + b + u)$$
$$k = \frac{u}{a + b + u} = \frac{600}{480 + 360 + 600} = \frac{5}{12}$$

Vypočteme délku lomené čáry *XYC* a délku úsečky *AX*:

$$|XY| + |YC| = k \cdot b + k \cdot a = k \cdot (b + a) = \frac{5}{12} \cdot (480\text{ m} + 360\text{ m}) = 350\text{ m}$$

$$|AX| = (1 - k) \cdot u = \left(1 - \frac{5}{12}\right) \cdot 600\text{ m} = 350\text{ m}$$

Délka druhé cesty je 700 m.

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

max. 3 body

12 Přiřaďte ke každé úloze (12.1–12.3) její řešení (A–F).

12.1 Ota má 8 her a Šimon 6 her (všech 14 her je navzájem různých).
Ota vymění kterékoli 2 své hry za libovolné 2 Šimonovy hry.

Kolika způsoby si chlapci mohou hry takto vyměnit? A

12.2 Na digitálních hodinách se každý časový údaj (v hodinách a minutách) mezi půlnocí a 10. hodinou zobrazuje právě **třemi** číslicemi (např. 0:08, 0:21, 9:50).

Kolik z těchto časových údajů obsahuje tři vzájemně různé číslice? B

12.3 V kině je posledních 5 volných míst v páté řadě a 2 místa ve druhé řadě.
Čtyři ze sedmi příchozích chtějí sedět v páté řadě, jedna osoba ve druhé řadě a zbývajícím dvěma osobám je to lhostejné.

Kolika způsoby je možné na jednotlivá místa rozsadit těchto 7 osob v souladu s jejich požadavky? D

A) 420

B) 432

C) 458

D) 480

E) 486

F) jiný počet

Řešení:

12.1 Vybereme dvojici z Otových her a dvojici ze Šimonových. Každou dvojici Otových her lze vyměnit za dvojici Šimonových her.

Počet všech způsobů, jak vyměnit dvojice her: $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} = 420$

12.2 V časovém údaji se mohou na druhé pozici (označující desítky minut) objevit pouze číslice 0 až 5, zatímco na ostatních pozicích se může objevit libovolná z 10 číslic.

Vytváříme časové údaje, v nichž se číslice vzájemně liší:
Nejprve obsadíme druhou pozici kteroukoli z 6 přípustných číslic (0 až 5).
První pozici zleva lze potom obsadit libovolnou číslicí různou od číslice na druhé pozici, tj. ke každé číslici na druhé pozici existuje 9 možností obsazení první pozice.
Číslice na třetí pozici se musí lišit od obou zbývajících číslic, tedy máme 8 možností.

Počet všech časových údajů obsahujících tři vzájemně různé číslice: $6 \cdot 9 \cdot 8 = 432$

12.3 Počet způsobů,
jak rozsadit 4 osoby, které chtějí sedět v páté řadě: $V_4(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$
jak usadit osobu, která chce sedět ve druhé řadě: 2
jak rozsadit zbývající 2 osoby na zbývající 2 neobsazená místa: $P(2) = 2 \cdot 1 = 2$

Počet všech způsobů, jak rozsadit všech 7 osob: $120 \cdot 2 \cdot 2 = 480$

max. 3 body

13 Přímka $p: y = x$ protíná kuželosečku v bodech M, N.

Přiřaďte ke každé kuželosečce (13.1–13.3) vzdálenost (A–F) bodů *M*, *N*.

13.1 Kružnice se středem $S[0; 0]$, která prochází bodem $A[-4; 2]$. D

13.2 Elipsa daná rovnicí $x^2 + 4y^2 - 40 = 0$. C

13.3 Parabola s vrcholem $V[0; -1{,}5]$ a ohniskem $F[0; -1]$. A

A) $4\sqrt{2}$

B) $2\sqrt{10}$

C) 8

D) $4\sqrt{5}$

E) 16

F) jiná vzdálenost

Řešení:

13.1 Úsečka SA je poloměr kružnice. Přímka p prochází středem S kružnice, vzdálenost bodů M, N je tedy rovna průměru kružnice, tj. $2 \cdot |SA|$.

$$|MN| = 2 \cdot |SA| = 2 \cdot \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$$

13.2 Elipsu označíme e.

$$M[x; y] \in e \cap p: \quad x^2 + 4y^2 - 40 = 0 \quad \wedge \quad y = x$$

$$x^2 + 4x^2 - 40 = 0$$

$$x^2 = 8$$

$$x = -2\sqrt{2} \ \vee \ x = 2\sqrt{2}, \qquad M\left[2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right], \qquad N\left[-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\right]$$

Elipsa e má střed v počátku soustavy souřadnic O, jímž prochází přímka p. Vzdálenost bodů M, N je tedy rovna $2 \cdot |OM|$.

$$|MN| = 2 \cdot |OM| = 2 \cdot \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{16} = 8$$

13.3 Parabolu označíme b a její parametr k. Osou paraboly je souřadnicová osa y.

$$b: x^2 = 2k(y + 1{,}5), \qquad k = 2 \cdot |VF| = 2 \cdot 0{,}5 = 1$$

$$x^2 = 2 \cdot 1 \cdot (y + 1{,}5)$$

$$x^2 = 2y + 3$$

$$M[x; y] \in b \cap p: \quad x^2 = 2y + 3 \quad \wedge \quad y = x$$

$$x^2 = 2x + 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

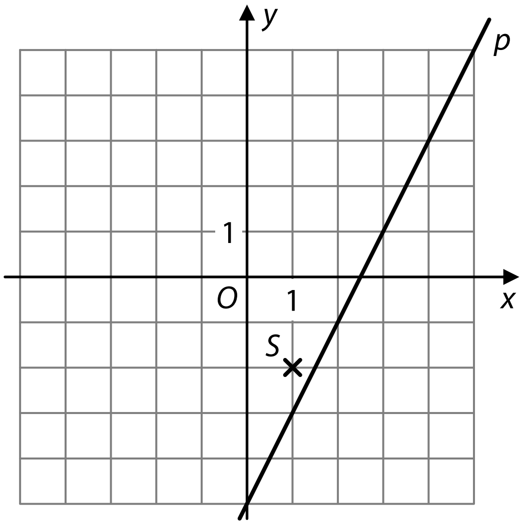
$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

$$x = -1 \ \vee \ x = 3, \qquad M[3; 3], \qquad N[-1; -1]$$

$$|MN| = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 14

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je zakreslena přímka p a bod S.



(Bod S je mřížový, přímka p prochází 6 mřížovými body zobrazené části čtvercové sítě.)

(CZVV)

2 body

14 Přímka q je obrazem přímky p ve středové souměrnosti se středem S.

Která rovnice je obecnou rovnicí přímky q?

A) $x - 2y + 4 = 0$

B) $x - 2y - 4 = 0$

C) $2x - y + 5 = 0$

D) $2x - y + 3 = 0$

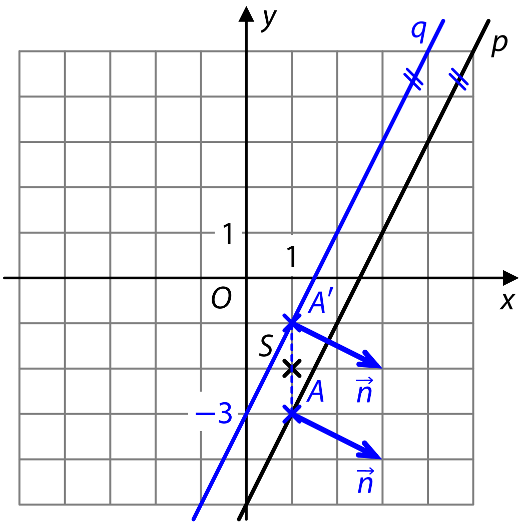
E) $2x - y - 3 = 0$

Řešení:

p: $A[1; -3]$, $\vec{n} = (2; -1)$

Obraz q přímky p ve středové souměrnosti je rovnoběžný se vzorem ($q \parallel p$), obě přímky mají tedy týž normálový vektor $\vec{n}$.

Pro konstrukci přímky q stačí ve středové souměrnosti zobrazit jeden bod přímky p, např. bod A.



$\mathcal{S}(S)$: $A[1; -3] \longrightarrow A'[1; -1]$

q: $2x - y + c = 0$

$A' \in q$: $2 \cdot 1 - (-1) + c = 0$, $c = -3$

q: $2x - y - 3 = 0$

případně:

Užijeme směrnicový tvar rovnice přímky q: $y = ax + b$
Rovnoběžné přímky p, q mají tutéž směrnici $a = 2$.
Přímka q protíná souřadnicovou osu y v bodě $[0; -3]$, tedy $b = -3$.

q: $y = 2x - 3$

$0 = 2x - y - 3$

2 body

15 **Která nerovnice má v oboru R tutéž množinu všech řešení jako nerovnice $x - 1 < 0$?**

A) $\frac{x-1}{-3} < 0$

B) $\frac{x^2+1}{x-1} < 0$

C) $\frac{x^2-1}{x+1} < 0$

D) $\frac{x(x-1)}{x} < 0$

E) $\frac{x-1}{x^2} < 0$

Řešení:

Množinou všech řešení nerovnice $x - 1 < 0$ v oboru **R** je interval $(-\infty; 1)$.

A) $\frac{x-1}{-3} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 > 0, \quad \mathrm{K_A} = (1; +\infty)$

B) $\frac{x^2+1}{x-1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 < 0, \quad \mathrm{K}_{\mathbf{B}} = (-\infty; 1)$

C) $\frac{x^2-1}{x+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -1 \quad \wedge \quad x - 1 < 0, \quad \mathrm{K_C} = (-\infty; -1) \cup (-1; 1)$

D) $\frac{x(x-1)}{x} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad x - 1 < 0, \quad \mathrm{K_D} = (-\infty; 0) \cup (0; 1)$

E) $\frac{x-1}{x^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad x - 1 < 0, \quad \mathrm{K_E} = (-\infty; 0) \cup (0; 1)$

2 body

16 Je dáno číslo:

$$a = \frac{81^{121} - 3^{481}}{27^{60} \cdot 9^{10}}$$

Které tvrzení je pravdivé?

A) Číslo a není celé číslo.

B) Číslo a je liché.

C) Číslo a je násobkem třinácti.

D) Číslo a je větší než 81^{71}.

E) Číslo a je možné zapsat ve tvaru 3^k, kde $k \in \mathbf{N}$.

Řešení:

Upravíme číselný výraz a a ověříme pravdivost jednotlivých tvrzení (A–E).

$$a = \frac{81^{121} - 3^{481}}{27^{60} \cdot 9^{10}} = \frac{(3^4)^{121} - 3^{481}}{(3^3)^{60} \cdot (3^2)^{10}} = \frac{3^{484} - 3^{481}}{3^{180} \cdot 3^{20}} = \frac{3^{481} \cdot (3^3 - 1)}{3^{200}} = 3^{281} \cdot 26$$

A) Číslo a je součinem celých čísel, je tedy celé.
Tvrzení A je nepravdivé.

B) Číslo $a = 2 \cdot (13 \cdot 3^{281})$ je násobkem dvou, je tedy sudé.
Tvrzení B je nepravdivé.

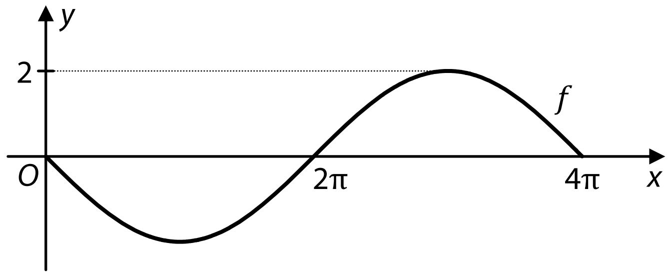
C) Číslo $a = 13 \cdot (2 \cdot 3^{281})$ je násobkem třinácti.
Tvrzení **C** je pravdivé.

D) $81^{71} = (3^4)^{71} = 3^{284} = 3^{281} \cdot 27 > 3^{281} \cdot 26 = a$
Tvrzení D je nepravdivé.

E) Číslo a je násobkem třinácti, nelze ho tedy zapsat jako přirozenou mocninu tří.
Tvrzení E je nepravdivé.

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 17

Funkce f s proměnnou $x \in \langle 0; 4\pi \rangle$ má předpis ve tvaru $y = a \cdot \sin(bx)$, kde $a, b \in \mathbf{R}$.
Funkce f je určena následujícím grafem.



(CZVV)

2 body

17 **Která z množin je množinou všech $x \in \langle 0; 4\pi \rangle$, pro něž platí $f(x) > -1$?**

A) $\left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}; 4\pi \right\rangle$

B) $\left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}; 4\pi \right\rangle$

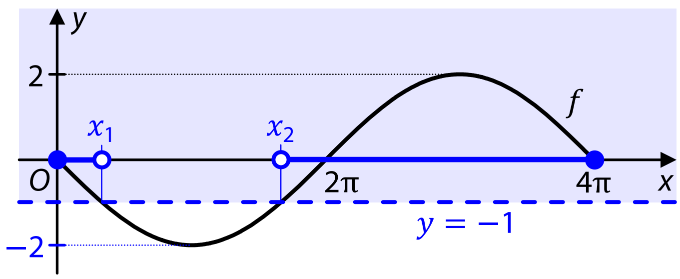
C) $\langle 0; \pi) \cup (\pi; 4\pi \rangle$

D) $\left\langle 0; \frac{7\pi}{3} \right) \cup \left(\frac{11\pi}{3}; 4\pi \right\rangle$

E) $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right)$

Řešení:

Body grafu funkce f vyhovující podmínce $f(x) > -1$ leží v polorovině $y > -1$ s hraniční přímkou $y = -1$. Určíme souřadnice x_1, x_2 průsečíků této přímky s grafem funkce f.



$f(x) > -1 \Leftrightarrow x \in \langle 0; x_1) \cup (x_2; 4\pi \rangle$

Funkce sinus nabývá hodnoty poloviny amplitudy v bodech, které leží v $\frac{1}{6}$ a v $\frac{5}{6}$ vzdálenosti mezi průsečíky se souřadnicovou osou x.

$x_1 = \frac{1}{6} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}$, $\quad x_2 = \frac{5}{6} \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{3}$, $\quad f(x) > -1 \Leftrightarrow x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}; 4\pi \right\rangle$

Jiný způsob řešení:

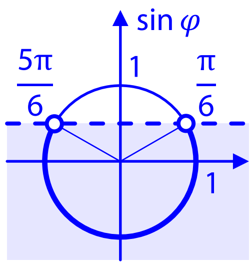
Z grafu určíme předpis funkce $f: y = -2 \sin \frac{x}{2}$ a vyřešíme nerovnici pro funkční hodnoty:

$$f(x) > -1, \qquad x \in \langle 0; 4\pi \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

$$-2 \sin \frac{x}{2} > -1$$

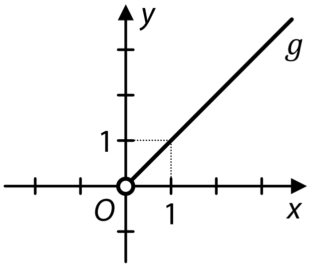
$$\sin \frac{x}{2} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} \in \left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}; 2\pi \right\rangle \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}; 4\pi \right\rangle$$



VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 18

Polopřímka bez počátečního bodu zakreslená v kartézské soustavě souřadnic *Oxy* je grafem funkce g.



(CZVV)

2 body

18 Každá z pěti funkcí h_1–h_5 je definována pro všechna $x \in \mathbf{R}$, pro která má smysl výraz na pravé straně jejího předpisu.

Která z funkcí h_1–h_5 má stejný graf jako funkce g?

A) $h_1\colon y = \dfrac{\log_5 x^2}{\log_5 x}$

B) $h_2\colon y = \dfrac{2x \cdot \log_5 x}{\log_5 x^2}$

C) $h_3\colon y = 5^{\log_5 x}$

D) $h_4\colon y = \log_5 5^x$

E) $h_5\colon y = \dfrac{(\log_5 5^x)^2}{x}$

Řešení:

Graf funkce g je částí grafu lineární funkce $y = x$, tedy $g\colon y = x,\ \ x \in (0; +\infty)$.

Pro každou z funkcí h_1–h_5 určíme nejprve definiční obor. Je-li roven definičnímu oboru funkce g, upravíme předpis funkce a ověříme, zda je ekvivalentní s předpisem funkce g.

$\mathrm{D}_{h_1} = (0; 1) \cup (1; +\infty)$

$\mathrm{D}_{h_2} = (0; 1) \cup (1; +\infty)$

$\mathrm{D}_{h_3} = (0; +\infty), \qquad h_3\colon y = 5^{\log_5 x} = x$

$\mathrm{D}_{h_4} = \mathbf{R}$

$\mathrm{D}_{h_5} = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 19

V balíčku je 12 karet očíslovaných přirozenými čísly od 1 do 12.
(Každá karta obsahuje právě jedno číslo, žádné dvě karty nejsou očíslovány stejným číslem.)

Balíček zamícháme a náhodně vytáhneme dvojici karet.

(CZVV)

2 body

19 Jaká je pravděpodobnost, že součet obou čísel na tažených kartách je dělitelný šesti?

A) $\frac{1}{22}$

B) $\frac{4}{33}$

C) $\frac{3}{22}$

D) $\frac{5}{33}$

E) jiná hodnota pravděpodobnosti

Řešení:

Počet všech výsledků náhodného pokusu (tažení dvojice karet): $\binom{12}{2} = 66$

Jev A: Součet obou čísel na tažených kartách je dělitelný šesti.

Výsledek příznivý jevu A nastane, bude-li součet obou (navzájem různých) čísel na tažených kartách 6, 12, nebo 18.

Vzhledem k nízkému počtu příznivých výsledků je můžeme pro konkrétní součty vypsat.

Možný součet	Vyhovující dvojice karet	Počet příznivých výsledků
6	$\{1; 5\}, \{2; 4\}$	2
12	$\{1; 11\}, \{2; 10\}, \{3; 9\}, \{4; 8\}, \{5; 7\}$	5
18	$\{6; 12\}, \{7; 11\}, \{8; 10\}$	3

Pravděpodobnost jevu A: $\frac{2+5+3}{66} = \frac{10}{66} = \frac{5}{33}$

případně

Čísla na tažených kartách jsou různá, menší z nich označíme a, $a \in \{1; 2; 3; \dots; 11\}$.

Součet s čísel na tažených kartách může nabývat hodnot z množiny $\{3; 4; 5; \dots; 23\}$, tedy možné součty dělitelné šesti jsou 6, 12, nebo 18.

Požadovaného součtu s lze dosáhnout jen tehdy, bude-li $a < \frac{s}{2}$.

Větší z čísel je určeno jednoznačně jako $s - a$, přitom $s - a \leq 12$ (číslo je na jedné z karet), tedy $a \geq s - 12$ (podmínka má smysl pouze pro $s > 12$).

Možný součet s	Podmínky pro a	Počet přípustných a (tj. počet příznivých výsledků)
6	$a < 3$	2
12	$a < 6$	5
18	$6 \leq a < 9$	3

Každé dvě takto sestavené dvojice jsou různé.

Pravděpodobnost jevu A: $\frac{2+5+3}{66} = \frac{10}{66} = \frac{5}{33}$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 20

Uvažujme dvě tělesa – **rotační válec** a **polokouli**.

Výška válce je o polovinu větší než poloměr r jeho podstavy.

Povrch polokoule (tedy včetně podstavy) je stejný jako povrch válce. Poloměr polokoule označme R.

(CZVV)

2 body

20 Který vztah vyjadřuje závislost poloměrů R a r?

A) $R = r$

B) $R = \frac{5}{3} \cdot r$

C) $R = \sqrt{3} \cdot r$

D) $R = \frac{\sqrt{30}}{2} \cdot r$

E) $R = \frac{\sqrt{15}}{3} \cdot r$

Řešení:

Poloměr r podstavy válce i poloměr R polokoule jsou kladná reálná čísla.
Výšku válce označíme v, jeho povrch S. Povrch polokoule je rovněž S.

$v = \frac{3}{2}r$

Povrch válce: $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{3}{2} r = 5\pi r^2$

Povrch polokoule: $S = \pi R^2 + \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 = 3\pi R^2$

Úpravou rovnosti povrchů obou těles získáme vztah pro poloměry:

$3\pi R^2 = 5\pi r^2$

$R^2 = \frac{5}{3} r^2, \qquad r, R \in \mathbf{R}^+$

$R = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot r = \frac{\sqrt{15}}{3} \cdot r$

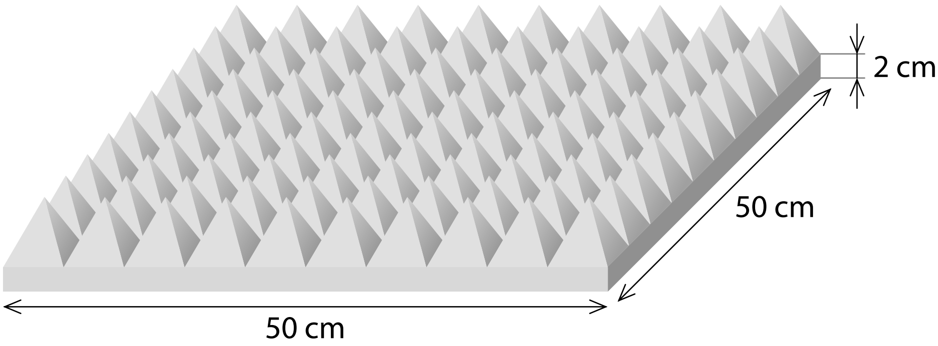
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

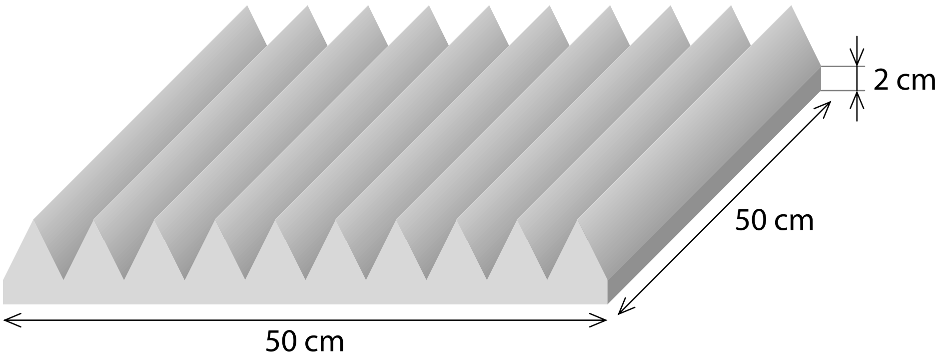
Profilované desky z akustické pěny se vyrábějí ve dvou provedeních.

Spodní část každé desky tvoří **platforma** tvaru pravidelného čtyřbokého hranolu s podstavnou hranou délky 50 cm a výškou 2 cm.

V prvním provedení horní podstavu platformy zcela pokrývá 100 shodných pravidelných čtyřbokých jehlanů. V každém jehlanu je výška stejná jako délka podstavné hrany.

Ve druhém provedení horní podstavu platformy zcela pokrývá 10 shodných kolmých trojbokých hranolů. Podstava trojbokého hranolu má tvar rovnoramenného trojúhelníku, který přiléhá k platformě svou základnou. Výška na základnu je stejná jako délka základny.





(*CZVV*)

2 body

21 Jaký je poměr objemů obou provedení akustických desek (větší objem ku menšímu)?

A) 27 : 22

B) 14 : 9

C) 3 : 2

D) 2 : 1

E) jiný poměr

Řešení:

Délku podstavné hrany platformy označíme p, výšku platformy h a její objem V_p.

$p = 50$ cm, $\quad h = 2$ cm

$V_p = p^2 h = 50^2 \cdot 2\ \text{cm}^3 = 5\,000\ \text{cm}^3$

První provedení desky:
Podél podstavné hrany platformy je v jedné řadě 10 shodných čtyřbokých jehlanů, každý má podstavnou hranu délky a a výšku v.

Platí: $a = \dfrac{p}{10} = 5\ \text{cm}, \qquad v = a$

Objem jednoho jehlanu: $V_\text{j} = \dfrac{1}{3}a^2v = \dfrac{a^3}{3} = \dfrac{5^3\ \text{cm}^3}{3} = \dfrac{125}{3}\ \text{cm}^3$

První provedení desky obsahuje platformu a 100 shodných jehlanů o celkovém objemu:

$V_\text{p} + 100V_\text{j} = 5\,000\ \text{cm}^3 + 100 \cdot \dfrac{125}{3}\ \text{cm}^3 = \dfrac{27\,500}{3}\ \text{cm}^3 = 9166{,}\overline{6}\ \text{cm}^3$

Druhé provedení desky:
Na platformě je položeno 10 shodných trojbokých hranolů s výškou p.
Podstavu každého hranolu tvoří rovnoramenný trojúhelník se základnou délky a a výškou na základnu o velikosti v_a.

Platí: $a = \dfrac{p}{10} = 5\ \text{cm}, \qquad v_a = a$

Objem jednoho hranolu: $V_\text{h} = \dfrac{1}{2}av_a \cdot p = \dfrac{a^2p}{2} = \dfrac{5^2 \cdot 50\ \text{cm}^3}{2} = 625\ \text{cm}^3$

Druhé provedení desky obsahuje platformu a 10 shodných hranolů o celkovém objemu:
$V_\text{p} + 10V_\text{h} = 5\,000\ \text{cm}^3 + 10 \cdot 625\ \text{cm}^3 = 11\,250\ \text{cm}^3$

Požadovaný poměr objemů obou provedení akustických desek (většího ku menšímu):
$$\frac{V_\text{p} + 10V_\text{h}}{V_\text{p} + 100V_\text{j}} = \frac{11\,250\ \text{cm}^3}{9\,166{,}\overline{6}\ \text{cm}^3} = \frac{27}{22}$$

případně

Při úpravě poměru objemů užijeme vztahu $p = 10a$:

$$\frac{V_\text{p} + 10V_\text{h}}{V_\text{p} + 100V_\text{j}} = \frac{p^2h + 10 \cdot \frac{a^2p}{2}}{p^2h + 100 \cdot \frac{a^3}{3}} = \frac{100a^2h + 10 \cdot \frac{a^2 \cdot 10a}{2}}{100a^2h + 100 \cdot \frac{a^3}{3}} = \frac{h + \frac{a}{2}}{h + \frac{a}{3}} = \frac{6h + 3a}{6h + 2a} = \frac{12 + 15}{12 + 10} = \frac{27}{22}$$

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 22

Právě tři skupiny vězňů A, B, C vyráběly ochranné pláště pro zdravotníky. Každý vězeň téže skupiny ušil stejný počet plášťů.

Ve **skupině A** je p vězňů a **každý** z nich ušil $(2p - 1)$ plášťů.

Skupina B má o p vězňů více než skupina A, ale **celkem** vyrobila o p plášťů méně než skupina A.

Skupina C má sice o 1 vězně méně než skupina A, každý její vězeň však ušil o 2 pláště více, než ušil každý vězeň skupiny A.

Skupina	A	B	C
Počet vězňů	p		
Počet plášťů, které ušil jeden vězeň	$2p - 1$		
Celkový počet vyrobených plášťů			

(CZVV)

max. 3 body

22 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (22.1–22.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
22.1	Ze všech vězňů, kteří šili pláště, je méně než polovina ve skupině B.	☐	☒
22.2	Každý vězeň skupiny A ušil o p plášťů více, než ušil každý vězeň skupiny B.	☒	☐
22.3	Skupina C celkem vyrobila více plášťů než skupina A.	☐	☒

Řešení:

Vyplníme tabulku podle zadání. Změny proti hodnotám skupiny A jsou vyznačeny červeně.

Skupina	A	B	C
Počet vězňů	p	$p + p = 2p$	$p - 1$
Počet plášťů, které ušil jeden vězeň	$2p - 1$	$(2p^2 - 2p) : 2p =$ $p - 1$	$2p - 1 + 2 =$ $2p + 1$
Celkový počet vyrobených plášťů	$p \cdot (2p - 1) =$ $2p^2 - p$	$2p^2 - p - p =$ $2p^2 - 2p$	$(p - 1)(2p + 1) =$ $2p^2 - p - 1$

22.1 Počet všech vězňů: $p + 2p + p - 1 = 4p - 1$

$2p < \frac{4p - 1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < -\frac{1}{2}$

Nerovnost neplatí pro žádné p.

Tvrzení 22.1 je **nepravdivé**.

22.2 $2p - 1 = p - 1 + p$

Tvrzení 22.2 je **pravdivé**.

22.3 $2p^2 - p - 1 > 2p^2 - p \quad \Leftrightarrow \quad -1 > 0$

Nerovnost neplatí pro žádné p.

Tvrzení 22.3 je **nepravdivé**.