MATEMATIKA

MAMZD21C0T01

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

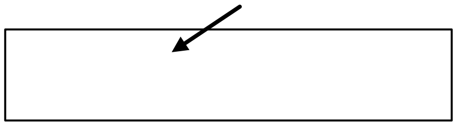
- **Didaktický test** obsahuje **26 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulátor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi pište do záznamového archu.
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- První část didaktického testu (úlohy 1–15) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 16–26) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** píšící propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

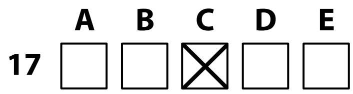
- Výsledky **pište čitelně** do vyznačených bílých polí.

1 

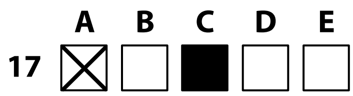
- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapište správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvěte původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

1 bod

1 **Pro $a \in \mathbf{N}$ upravte výraz a vyjádřete jej ve tvaru odmocniny o základu a.**

$a^{\frac{1}{4}} : \sqrt[6]{a} =$

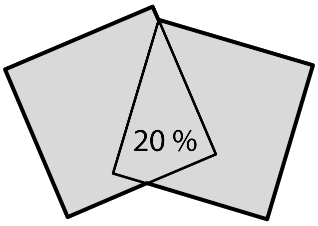
Řešení:

$a^{\frac{1}{4}} : \sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a}$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 2

Sloučením dvou **shodných** čtverců, které se částečně překrývají, vznikl šedý rovinný útvar.

Obsah části, v níž se oba čtverce překrývají, tvoří 20 % obsahu **celého** šedého útvaru.



(*CZVV*)

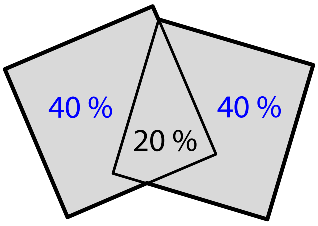
1 bod

2 **Určete, kolik procent obsahu celého šedého útvaru tvoří obsah jednoho čtverce.**

Řešení:

(100 % − 20 %) : 2 = 40 %

Nepřekryté části čtverců mají stejný obsah, tedy každá z nich tvoří 40 % obsahu celého šedého útvaru.



40 % + 20 % = **60 %**

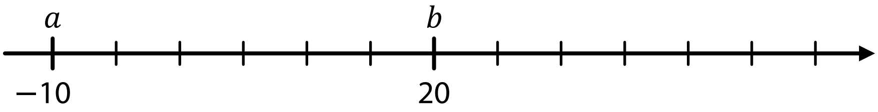
Obsah jednoho čtverce tvoří **60 %** obsahu celého šedého útvaru.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 3

Na číselné ose je vyznačeno 12 stejných dílků a obrazy čísel $a = -10$, $b = 20$.

Pro čísla x, y platí:

Číslo x je trojnásobek čísla y a zároveň číslo y je o 30 menší než číslo x.



(*CZVV*)

max. 2 body

3 Na číselné ose vyznačte a popište obrazy čísel x, y.

Řešení:

$$\frac{b-a}{6} = \frac{20-(-10)}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

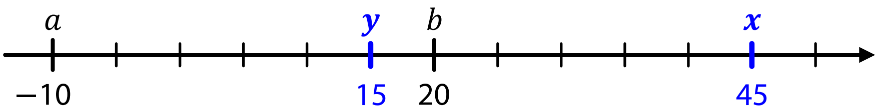
Mezi obrazy čísel a, b, která se liší o 30, je na číselné ose 6 dílků, jeden dílek proto představuje 5 jednotek.

Z podmínek pro čísla x, y sestavíme soustavu rovnic:

$$x = 3y$$
$$y = x - 30$$

$$\begin{aligned} x &= 3(x-30) \\ y &= x - 30 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 90 &= 2x \\ y &= x - 30 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= 45 \\ y &= 15 \end{aligned}$$

Vyřešením soustavy získáme čísla x, y, jejichž obrazy vyznačíme na číselné ose:



max. 2 body

4 Pro $y \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$ zjednodušte:

$$\frac{\frac{y}{3} - \left(\frac{y}{3}\right)^2}{3y - 9} =$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

$$\frac{\frac{y}{3} - \left(\frac{y}{3}\right)^2}{3y - 9} = \frac{\frac{y}{3} \cdot \left(1 - \frac{y}{3}\right)}{3y - 9} = \frac{-\frac{y}{3} \cdot \left(\frac{y}{3} - 1\right)}{9 \cdot \left(\frac{y}{3} - 1\right)} = \frac{-\frac{y}{3}}{9} = -\frac{y}{27}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 5

Na stejné cívky se navíjejí ocelová lana. Hmotnost **prázdné cívky** je c tun, hmotnost samotného **lana** na plně navinuté cívce je ℓ tun a hmotnost lana poloviční délky je $0{,}5\ell$ tun.

Jedna plně navinutá cívka a 11 prázdných cívek mají dohromady o 4 tuny menší hmotnost než 6 cívek s lany polovičních délek.

(*CZVV*)

max. 2 body

5 Vyjádřete veličinu ℓ v závislosti na veličině c.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

Podle zadání sestavíme rovnici se dvěma neznámými c, ℓ a ekvivalentními úpravami získáme explicitní vyjádření ℓ pomocí c:

$$c + \ell + 11c = 6(c + 0{,}5\ell) - 4$$
$$12c + \ell = 6c + 3\ell - 4$$
$$6c + 4 = 2\ell$$
$$\ell = 3c + 2$$

---

max. 2 body

6 V oboru R řešte:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6} - \frac{3}{2} = 0$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6} - \frac{3}{2} = 0$$
$$\frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \frac{3}{2}, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 3\}$$
$$\frac{x-2}{x-3} = \frac{3}{2} \quad \Big| \cdot 2(x-3)$$
$$2x - 4 = 3x - 9$$
$$5 = x, \qquad \mathrm{K} = \{5\}$$

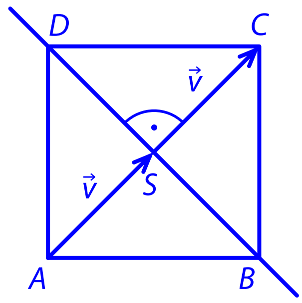
max. 2 body

7 Čtverec *ABCD* má vrchol $A[2; -2]$ a střed $S[3; 0]$.

7.1 Zapište souřadnice vrcholu *C* čtverce *ABCD*.

7.2 Zapište obecnou rovnici přímky *BD*.

Řešení:



7.1 $\vec{v} = S - A = (1; 2)$

$C = S + \vec{v} = [3 + 1; 0 + 2]$

$\mathbf{C[4; 2]}$

7.2 Přímka *BD* má normálový vektor $\vec{v} = (1; 2)$ a prochází bodem $S[3; 0]$.

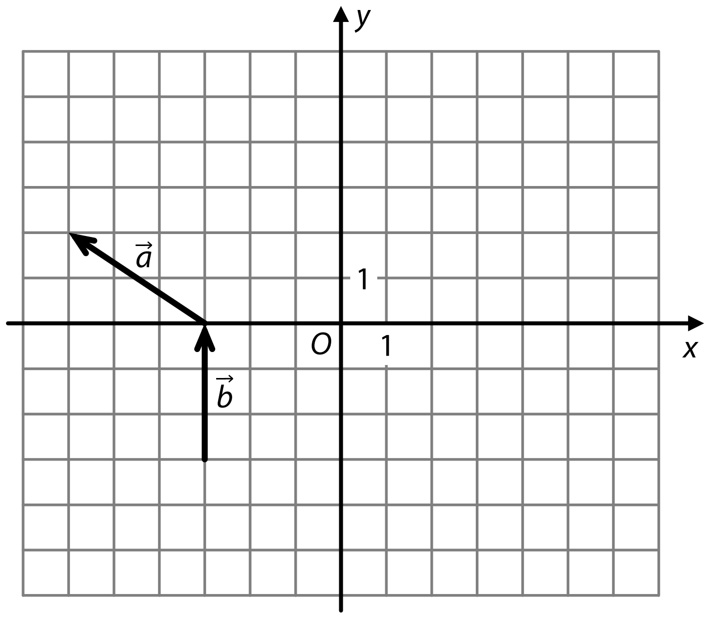
$\leftrightarrow BD$: $\quad x + 2y + c = 0$

$S \in \leftrightarrow BD$: $\quad 3 + 2 \cdot 0 + c = 0, \qquad c = -3$

$\leftrightarrow BD$: $\quad \boldsymbol{x + 2y - 3 = 0}$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* jsou umístěny vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$.
(Počáteční i koncové body umístění těchto vektorů jsou v mřížových bodech.)



(CZVV)

max. 2 body

8

8.1 Pro vektor $\vec{u} = (-6; u_2)$ platí:

$\vec{a} \cdot \vec{u} = 0$

Vypočtěte chybějící souřadnici u_2 vektoru $\vec{u}$.

Řešení:

Z obrázku získáme souřadnice vektoru $\vec{a}$: $\vec{a} = (-3; 2)$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{u} &= 0 \\ (-3; 2) \cdot (-6; u_2) &= 0 \\ 18 + 2u_2 &= 0 \\ \boldsymbol{u_2} &= \boldsymbol{-9} \end{aligned}$$

8.2 Zakreslete vektor $\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$ tak, aby bod O byl počátečním bodem jeho umístění v kartézské soustavě souřadnic Oxy.

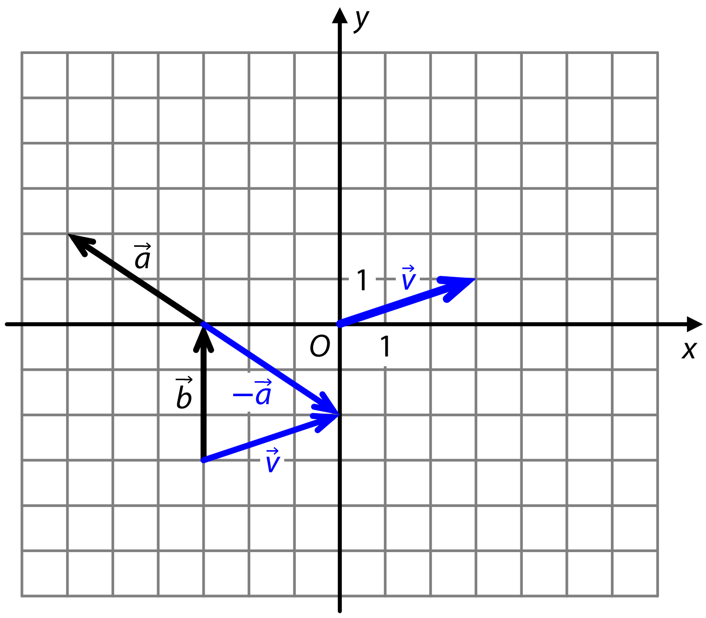
V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

Řešení:

$\vec{v} = \vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a})$

Sečteme graficky vektor $\vec{b}$ a vektor opačný k vektoru $\vec{a}$.

Zakreslíme výsledný vektor tak, aby počátečním bodem jeho umístění byl bod O.



Jiný způsob řešení:

Z obrázku získáme souřadnice zadaných vektorů a vypočteme souřadnice vektoru $\vec{v}$.

$\vec{a} = (-3; 2)$, $\vec{b} = (0; 3)$

$\vec{v} = \vec{b} - \vec{a} = (3; 1)$

Souřadnice koncového bodu umístění vektoru, jehož počátečním bodem je počátek O souřadnicové soustavy, jsou stejné jako souřadnice vektoru, tj. $[3; 1]$.

---

1 bod

9 V oboru R řešte:

$$\frac{x^2 - 5x}{x} \leq 0$$

Řešení:

$$\frac{x^2 - 5x}{x} \leq 0, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

$$\frac{x(x-5)}{x} \leq 0$$

$$x - 5 \leq 0$$

$$x \leq 5, \qquad \mathbf{K} = (-\infty; \mathbf{0}) \cup (\mathbf{0}; \mathbf{5}\rangle$$

1 bod

10 V oboru R řešte:

$$2^{5x} - \log_5 \sqrt{5} = 0$$

Řešení:

$$2^{5x} - \log_5 \sqrt{5} = 0$$

$$2^{5x} = \log_5 5^{\frac{1}{2}}$$

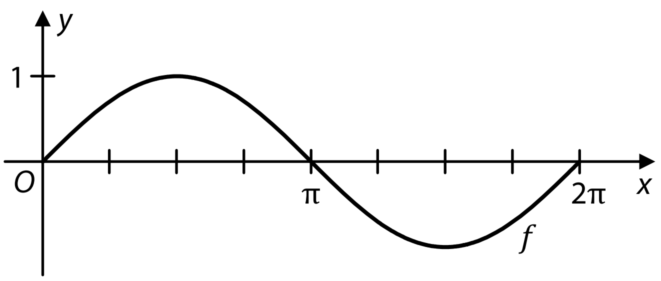
$$2^{5x} = \frac{1}{2}$$

$$2^{5x} = 2^{-1} \Leftrightarrow 5x = -1$$

$$x = -\frac{1}{5}, \qquad \mathbf{K} = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 11

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* je sestrojen graf funkce $f\colon y = \sin x$ pro $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$.



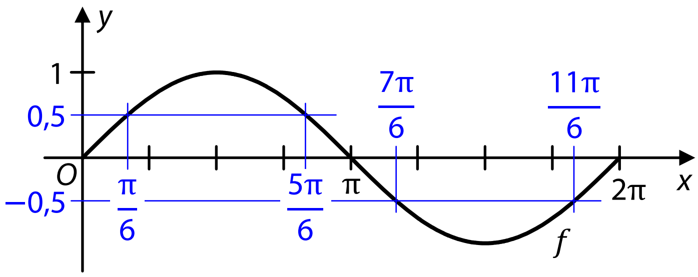
(CZVV)

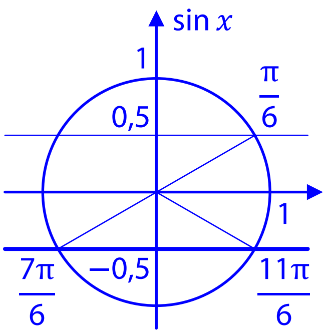
max. 2 body

11 Vypočtěte všechny hodnoty proměnné $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$, pro něž je $f(x) = -0{,}5$.

Řešení:

Využijeme vlastností funkce sinus a známé hodnoty $\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5$.

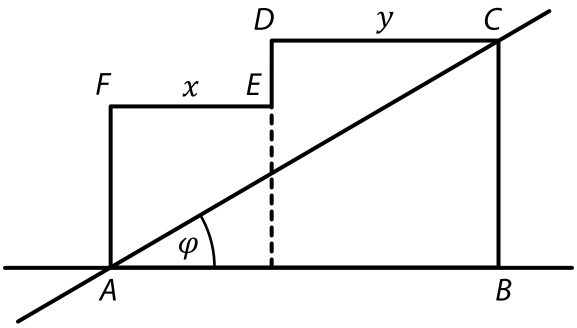




$$\boldsymbol{x_1 = \frac{7\pi}{6}}, \qquad \boldsymbol{x_2 = \frac{11\pi}{6}}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 12

Šestiúhelník *ABCDEF* na obrázku je složen ze dvou čtverců, jejichž strany mají délky x, y. Odchylka přímek *AB* a *AC* je φ.



(CZVV)

1 bod

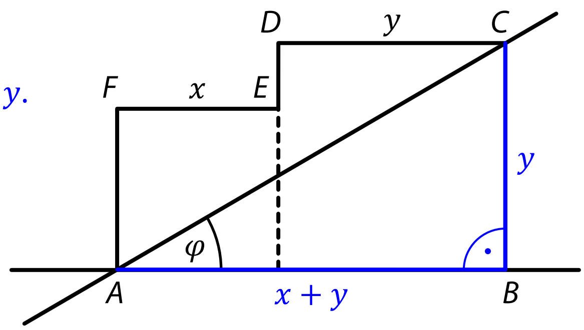
12 Vypočtěte poměr $y : x$, jestliže platí:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{9}{13}$$

Řešení:

V pravoúhlém trojúhelníku *ABC* leží proti vnitřnímu úhlu o velikosti φ odvěsna *BC* délky y. Přilehlá odvěsna *AB* má délku $x + y$.

V trojúhelníku *ABC* platí: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x+y}$



$$\frac{y}{x+y} = \frac{9}{13}$$

$$13y = 9x + 9y$$

$$4y = 9x$$

$$\boldsymbol{y : x = 9 : 4}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

Ze skupiny 25 žáků, ve které je 18 dívek a 7 chlapců, se vylosují dva žáci.

(CZVV)

1 bod

13 Určete pravděpodobnost, že se vylosuje smíšený pár (dívka a chlapec).

Řešení:

Ze skupiny 25 žáků lze vylosovat $\binom{25}{2}$ různých dvojic.

Do smíšeného páru musí být vylosována 1 dívka (18 možností) a k ní 1 chlapec (7 možností).

Počet výsledků příznivých požadovanému jevu S (vylosovaný pár je smíšený): $18 \cdot 7 = 126$

Pravděpodobnost jevu S: $P(S) = \frac{126}{\binom{25}{2}} = \frac{126}{300} = \boldsymbol{\frac{21}{50}}$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Emil, Pavel a Martin koupili společně dárek za 2 975 korun.

Pavel přispěl částkou o 20 % vyšší než Emil.

Emil přispěl částkou, která je o 20 % menší než aritmetický průměr příspěvků Pavla a Martina.

(*CZVV*)

max. 3 body

14 Vypočtěte, jakou částkou přispěl Martin.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení** (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení:

Částky (v korunách), kterými přispěli Emil, Pavel a Martin, označme po řadě e, p a m.

Platí:

$$e + p + m = 2\,975$$
$$p = 1{,}2e$$
$$e = 0{,}8 \cdot \frac{p + m}{2}$$

Z druhé rovnice dosadíme do třetí a vyjádříme m pomocí e:

$$e = 0{,}8 \cdot \frac{1{,}2e + m}{2}$$
$$e = 0{,}48e + 0{,}4m$$
$$0{,}52e = 0{,}4m$$
$$m = 1{,}3e$$

Dosadíme do první rovnice a vypočteme nejprve e a potom m:

$$e + p + m = 2\,975$$
$$e + 1{,}2e + 1{,}3e = 2\,975$$
$$3{,}5e = 2\,975$$
$$e = 850, \qquad m = 1{,}3 \cdot 850 = 1\,105$$

Martin přispěl částkou 1 105 korun.

případně

Ze třetí rovnice dosadíme za e do první rovnice a vypočteme součet $p + m$:

$$0{,}8 \cdot \frac{p + m}{2} + p + m = 2\,975$$
$$1{,}4(p + m) = 2\,975$$
$$p + m = 2\,125$$

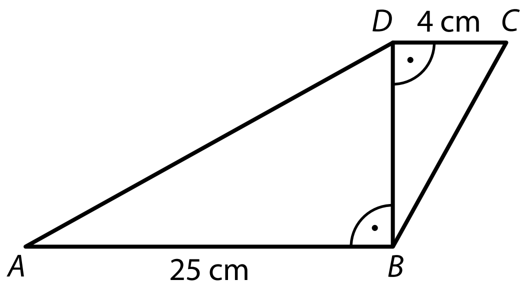
Postupným dosazováním vypočteme příspěvky všech chlapců:

$$e = 0{,}4(p + m) = 0{,}4 \cdot 2125 = 850$$
$$p = 1{,}2e = 1{,}2 \cdot 850 = 1020$$
$$m = 2\,975 - (e + p) = 2\,975 - (850 + 1\,020) = 1\,105$$

Martin přispěl částkou 1 105 korun.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 15

V lichoběžníku *ABCD* mají základny *AB* a *CD* délky 25 cm a 4 cm. Úhlopříčka *BD* je současně výškou lichoběžníku a rozděluje ho na dva trojúhelníky, které jsou podobné.



(*CZVV*)

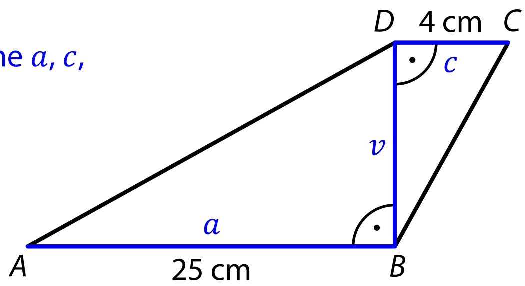
max. 2 body

15 Vypočtěte v cm^2 **obsah lichoběžníku** ***ABCD*****.**

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

Délky základen *AB*, *CD* lichoběžníku *ABCD* označme a, c, výšku lichoběžníku označme v a jeho obsah S.



$a = 25$ cm, $\qquad c = 4$ cm

Pro podobné trojúhelníky *ABD* a *BDC* platí:

$$\frac{a}{v} = \frac{v}{c}$$

$$ac = v^2$$

$$v = \sqrt{ac} = \sqrt{25 \cdot 4}\ \text{cm} = 10\ \text{cm}$$

Obsah lichoběžníku *ABCD*: $\quad S = \dfrac{a+c}{2} \cdot v = \dfrac{25\ \text{cm} + 4\ \text{cm}}{2} \cdot 10\ \text{cm} = 145\ \text{cm}^2$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

V pravoúhlém trojúhelníku *ABC* má přepona *AB* délku c, odvěsna *AC* délku b a zbývající strana délku a. Vnitřní úhel při vrcholu *A* má velikost α a při vrcholu *B* velikost β. (CZVV)

max. 2 body

16 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
16.1	$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1$	☒	☐
16.2	$\frac{a+b}{c}=1$	☐	☒
16.3	$c\cdot\sin\alpha=b\cdot\operatorname{tg}\alpha$	☒	☐
16.4	$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$	☒	☐

Řešení:

Délky a, b, c stran pravoúhlého trojúhelníku *ABC* jsou kladná čísla.

16.1 Vynásobením obou stran dané rovnosti kladným výrazem c^2 získáme vztah: $a^2+b^2=c^2$, tedy Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku *ABC*.

Tvrzení 16.1 je **pravdivé**.

16.2 Vynásobením obou stran dané rovnosti kladným výrazem c získáme vztah: $a+b=c$, který je v rozporu s trojúhelníkovou nerovností $a+b>c$.

Tvrzení 16.2 je **nepravdivé**.

16.3 V dané rovnosti nahradíme goniometrické funkce ostrých vnitřních úhlů pravoúhlého trojúhelníku *ABC* dle jejich definic: $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$.

Získáme vztah: $c\cdot\frac{a}{c}=b\cdot\frac{a}{b}$, který platí pro všechna a, b, c (definovaná v úloze).

Tvrzení 16.3 je **pravdivé**.

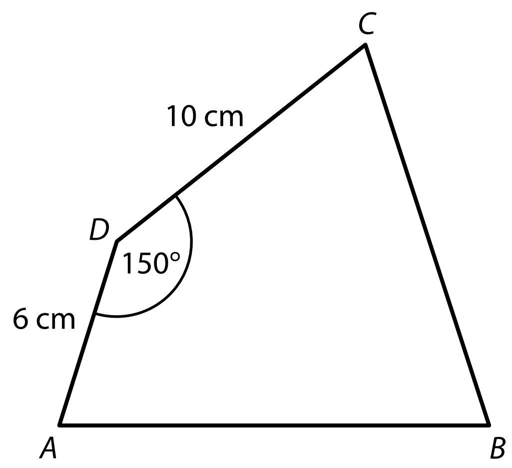
16.4 V pravoúhlém trojúhelníku *ABC* platí pro ostré vnitřní úhly α a β: $\sin\beta=\cos\alpha$, protože $\sin\beta=\frac{b}{c}$ a také $\cos\alpha=\frac{b}{c}$.

Dosazením do dané rovnosti získáme vztah: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, který platí pro libovolnou hodnotu α.

Tvrzení 16.4 je **pravdivé**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 17

Ve čtyřúhelníku *ABCD* o obsahu 70 cm^2 platí: $|\sphericalangle ADC| = 150°$, $|CD| = 10$ cm, $|AD| = 6$ cm.



(*CZVV*)

2 body

17 Jaký je obsah trojúhelníku *ABC*?

A) menší než 43 cm^2

B) 44 cm^2

C) 49 cm^2

D) 55 cm^2

E) větší než 56 cm^2

Řešení:

Ve čtyřúhelníku *ABCD* označme c, d délky stran *CD*, *DA* a δ velikost vnitřního úhlu *ADC*.
Dále označme obsahy: S čtyřúhelníku *ABCD*, S_1 trojúhelníku *ABC* a S_2 trojúhelníku *ACD*.

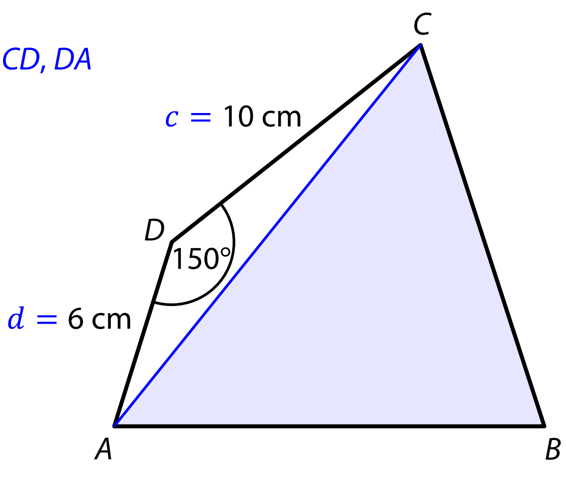
$c = 10$ cm, $d = 6$ cm, $\delta = 150°$,
$S = 70$ cm^2

Pro obsahy platí: $S = S_1 + S_2$

$$S_2 = \frac{1}{2} cd \sin \delta$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \sin 150° \text{ cm}^2 = 15 \text{ cm}^2$$

$$S_1 = S - S_2$$
$$S_1 = 70 \text{ cm}^2 - 15 \text{ cm}^2 = 55 \text{ cm}^2$$



2 body

18 Je dán výraz:

$$V(a) = \frac{(a+4)(a^2-4)(a+3)^2}{(a^2-9)(a-2)^2}$$

Hodnota výrazu $V(a)$ je rovna nule pro

A) alespoň tři celá čísla.

B) právě dvě záporná celá čísla.

C) právě jedno kladné a jedno záporné celé číslo.

D) právě dvě kladná celá čísla.

E) právě jedno celé číslo.

Řešení:

$$V(a) = \frac{(a+4)(a^2-4)(a+3)^2}{(a^2-9)(a-2)^2} = \frac{(a+4)(a+2)(a-2)(a+3)^2}{(a+3)(a-3)(a-2)^2}$$

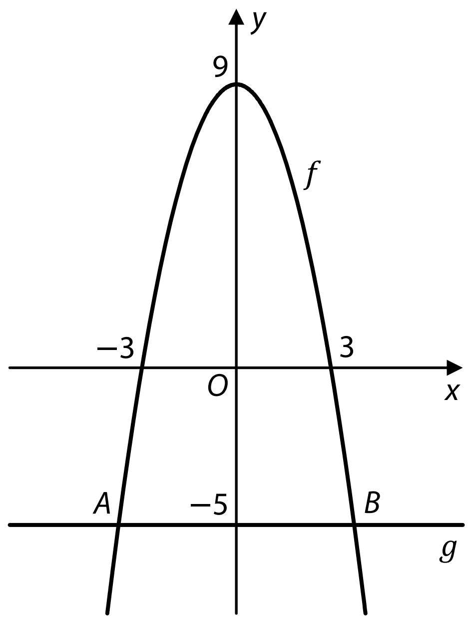
Výraz $V(a)$ je definován pro všechna $a \in \mathbf{R} \setminus \{-3; 2; 3\}$.

Hodnota výrazu $V(a)$ je rovna nule pro taková a z definičního oboru výrazu, pro která je alespoň jeden činitel v čitateli roven nule, tedy pro $a = -4$, nebo pro $a = -2$.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* je sestrojen graf kvadratické funkce f a graf konstantní funkce g.

Průsečíky grafů funkcí f a g jsou body *A*, *B*.



(*CZVV*)

2 body

19 Jaká je vzdálenost bodů *A*, *B*?

A) $2\sqrt{14}$

B) 7,6

C) $2\sqrt{15}$

D) 8

E) jiná vzdálenost

Řešení:

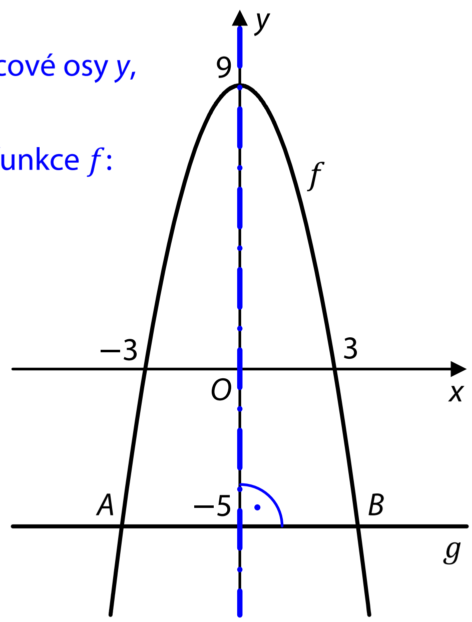
Graf kvadratické funkce f je souměrný podle souřadnicové osy *y*, a protíná tuto osu v bodě [0; 9]: $f: y = ax^2 + 9$

Pro výpočet hodnoty a užijeme např. bod [3; 0] grafu funkce f:

$$f(3) = 0$$
$$a \cdot 3^2 + 9 = 0$$
$$a = -1$$

$$f: y = -x^2 + 9$$
$$g: y = -5$$

$$-5 = -x^2 + 9$$
$$x^2 = 14$$
$$x_A = -\sqrt{14}, \qquad x_B = \sqrt{14}$$

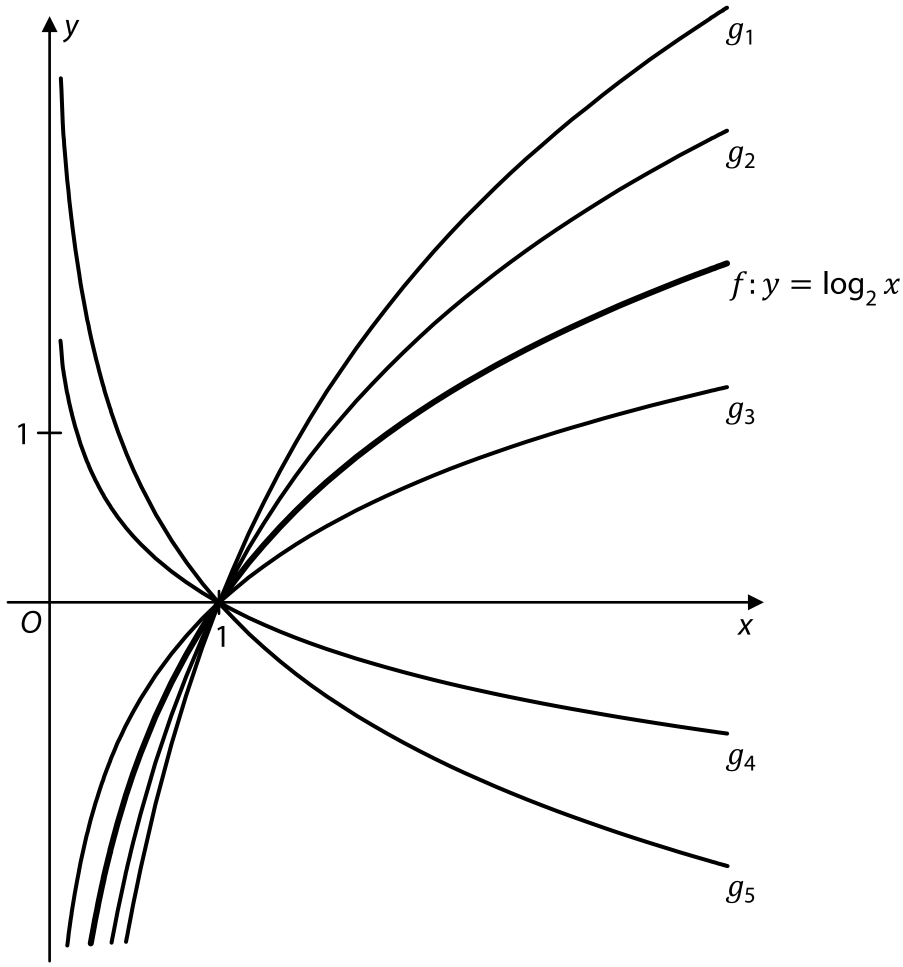


Body *A*, *B* leží na kolmici k ose *y*:

$$|AB| = |x_A - x_B| = \left|-\sqrt{14} - \sqrt{14}\right| = 2\sqrt{14}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 20

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* je sestrojen graf funkce $f\colon y = \log_2 x$ a grafy pěti dalších logaritmických funkcí g_1–g_5 s předpisy $y = \log_a x$, v nichž se základy a vzájemně liší. Všechny tyto funkce mají definiční obor $(0; +\infty)$.



(CZVV)

2 body

20 Kolik z daných funkcí g_1–g_5 má základ menší než 2 (tj. $a < 2$)?

A) nelze určit

B) 1

C) 2

D) 3

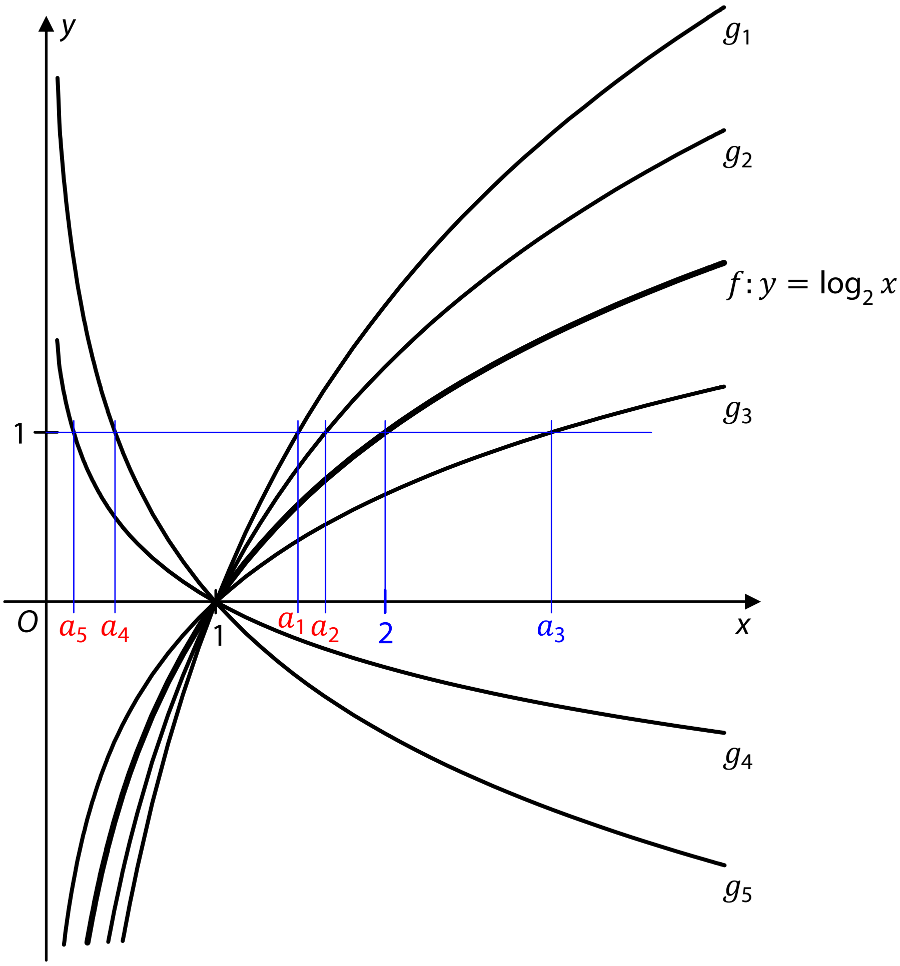
E) 4

Řešení:

Pro logaritmickou funkci $y = \log_a x$ o libovolném základu $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ platí $\log_a x = 1$, právě když $x = a$, neboť $\log_a a = 1$.

Graf logaritmické funkce o základu a tedy prochází bodem $[a; 1]$.

Pro každou z logaritmických funkcí g_1–g_5 zjistíme z grafu základ a_1–a_5 tak, že určíme $x \in (0; +\infty)$, v němž nabývá funkce hodnoty 1.



Na ose *x* vidíme, že právě 4 z nalezených základů (a_5, a_4, a_1, a_2) jsou menší než 2.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 21

V rizikové oblasti se počty nově nakažených osob evidují denně vždy v 18 hodin. V poslední době pozorujeme exponenciální růst šíření nákazy a zatím se nepředpokládá změna tohoto trendu. Tedy denní počty nově nakažených osob odpovídají po sobě jdoucím členům geometrické posloupnosti zaokrouhleným na celá čísla.

V sobotu (tj. před 2 dny) bylo evidováno 729 nově nakažených osob, v pondělí (tj. dnes) 810 osob a v pátek tohoto týdne (tj. ode dneška za 4 dny) lze očekávat n nově nakažených osob.

(CZVV)

2 body

21 Ve kterém intervalu leží n?

A) $(810; 980\rangle$

B) $(980; 1\,030\rangle$

C) $(1\,030; 1\,080\rangle$

D) $(1\,080; 1\,230\rangle$

E) $(1\,230; 2\,460\rangle$

Řešení:

Počet nově nakažených osob evidovaných v sobotu budeme považovat za první člen a_1 geometrické posloupnosti $(a_k)_{k=1}^{\infty}$. Kvocient této posloupnosti označme q.
Dnes evidovaný počet odpovídá třetímu členu a_3 posloupnosti
a počet nově nakažených, který lze očekávat v pátek, odpovídá sedmému členu a_7.

$a_1 = 729, \qquad a_3 = 810, \qquad a_7 = n$

Pro libovolné dva členy a_r, a_s geometrické posloupnosti s kvocientem q platí:

$a_s = a_r \cdot q^{s-r}$

Pro členy a_1, a_3 tedy dostaneme:

$a_3 = a_1 \cdot q^2$

$q^2 = \frac{a_3}{a_1} = \frac{810}{729} = \frac{10}{9}$

Počet nově nakažených, který lze očekávat v pátek:

$a_7 = a_3 \cdot q^4 = a_3 \cdot (q^2)^2 = 810 \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^2 = 1\,000$

$n = 1\,000, \qquad n \in (980; 1\,030\rangle$

2 body

22 V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí:

$a_3 = 8$

$a_5 = a_3 + a_4$

Které z následujících tvrzení je <u>nepravdivé</u>?

A) $a_1 + a_2 + a_3 = 0$

B) $a_2 + a_3 = 8$

C) $a_1 + a_3 = a_2$

D) $a_2 + a_4 = a_3$

E) $a_2 + a_3 + a_4 = a_5$

Řešení:

Pro libovolné dva po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti s diferencí d platí: $a_{n+1} = a_n + d$, konkrétně pro $n = 4$ dostaneme: $a_5 = a_4 + d$.

Z rovnosti $a_5 = a_4 + a_3$ pak plyne, že a_3 je diference d dané posloupnosti:
$d = a_3 = 8$

V každé rovnosti (A–E) upravíme levou stranu užitím vlastností členů aritmetické posloupnosti nebo některé z rovností $d = a_3 = 8$.

A) $a_1 + a_2 + a_3 = (a_3 - 2d) + (a_3 - d) + a_3 = 3a_3 - 3d = 3a_3 - 3a_3 = 0$
Tvrzení A je pravdivé.

B) $a_2 + a_3 = (a_3 - d) + a_3 = 2a_3 - d = 2a_3 - a_3 = a_3 = 8$
Tvrzení B je pravdivé.

C) $a_1 + a_3 = a_1 + d = a_2$
Tvrzení C je pravdivé.

D) $a_2 + a_4 = (a_3 - d) + (a_3 + d) = 2a_3 \neq a_3$
Tvrzení D **není** pravdivé.

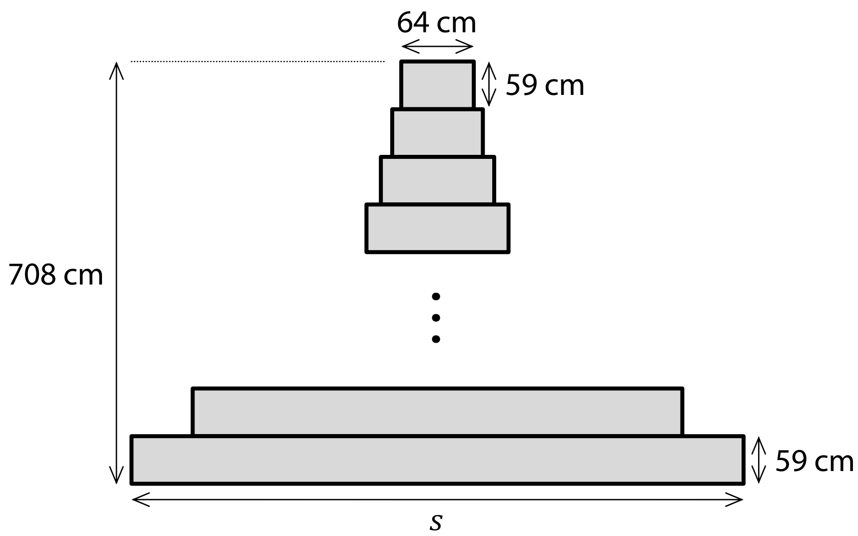
E) $a_2 + a_3 + a_4 = (a_3 - d) + a_3 + (a_3 + d) = a_3 + 2a_3 = a_3 + 2d = a_5$
Tvrzení E je pravdivé.

případně

Užitím rovností $d = a_3 = 8$ vypočteme prvních 5 členů posloupnosti: $-8; 0; 8; 16; 24$
a dosazením hodnot do rovností (A–E) ověříme, že nepravdivé je pouze tvrzení D.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 23

Na zeď haly je promítnut obrazec vysoký 708 cm. Obrazec je složen z obdélníků, první obdélník shora má výšku 59 cm a šířku 64 cm. Každý další obdélník má rovněž výšku 59 cm, ale šířku má vždy o čtvrtinu větší, než je šířka předchozího obdélníku. (Mezi obdélníky nejsou žádné mezery.)



(CZVV)

2 body

23 Jaká je šířka s posledního obdélníku?

Výsledek je zaokrouhlen na celé cm.

A) 745 cm

B) 768 cm

C) 809 cm

D) 931 cm

E) jiná šířka

Řešení:

Všechny obdélníky v obrazci mají stejnou výšku 59 cm, výška celého obrazce je 708 cm.

Počet obdélníků v obrazci: $\dfrac{708 \text{ cm}}{59 \text{ cm}} = 12$

Šířky obdélníků (v cm) tvoří geometrickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{12}$ s kvocientem $q = \dfrac{5}{4}$.

Šířka s posledního obdélníku (v cm) je dvanáctým členem a_{12} této posloupnosti.

$a_1 = 64, \qquad q = \dfrac{5}{4}$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_{12} = 64 \cdot \left(\dfrac{5}{4}\right)^{11} \doteq 745$

$s \doteq 745$ cm

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 24

Z šesti číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5 vytváříme pětimístná (neboli pěticiferná) čísla, v jejichž zápisu jsou v každé trojici sousedních číslic tři různé číslice. (Pětimístné číslo nezačíná číslicí 0.)

Např. v zápisu pětimístného čísla 10 240 obsahuje každá trojice sousedních číslic (tj. 102, 024 a 240) tři různé číslice.

(*CZVV*)

2 body

24 Kolik pětimístných čísel splňujících uvedené podmínky lze vytvořit?

A) 720

B) 1 024

C) 1 600

D) 1 920

E) 2 000

Řešení:

V pětimístném čísle uvažujeme počet číslic, kterými lze zleva obsadit jednotlivé pozice:

1. Na první pozici zleva může být kterákoli z 5 nenulových číslic (1 až 5), tj. 5 možností.
2. Na druhé pozici již nemůže být číslice z první pozice, ale lze navíc použít číslici 0, která na první pozici být nemohla. Ke každé číslici na první pozici tedy existuje 5 možností obsazení druhé pozice.
3. Na třetí pozici nelze použít předchozí dvě číslice (neboť každá trojice sousedních číslic obsahuje 3 různé číslice), a zbývají tak 4 možnosti pro obsazení této pozice.

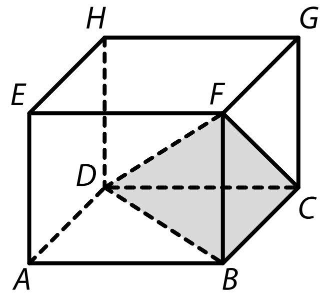
4., 5. Stejně tak na každé další pozici nelze použít pouze předchozí dvě číslice, a zbývají tak vždy 4 možnosti pro obsazení pozice.

Počet všech pětimístných čísel splňujících podmínky zadání: $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1600$
(Užili jsme kombinatorického pravidla součinu.)

25 Přiřaďte ke každé úloze (25.1–25.4) odpovídající výsledek (A–F).

25.1 V kvádru *ABCDEFGH* je umístěn trojboký jehlan *BCDF*.
Objem kvádru *ABCDEFGH* je 240 cm^3.

Jaký je objem trojbokého jehlanu ***BCDF*****?** E



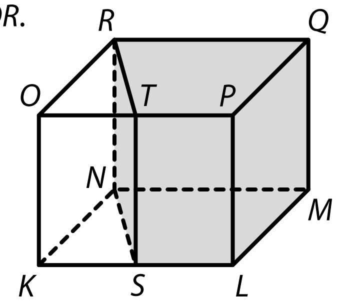
Řešení:

Obsah podstavy *BCD* jehlanu je polovinou obsahu podstavy *ABCD* kvádru, výška *BF* jehlanu je stejná jako výška kvádru. Objem jehlanu je vždy třetinou objemu hranolu o stejné podstavě i výšce, tedy objem V jehlanu *BCDF* je šestinou objemu kvádru *ABCDEFGH*.

$$V = \frac{1}{6} \cdot 240\ \text{cm}^3 = 40\ \text{cm}^3$$

25.2 V kvádru *KLMNOPQR* je umístěn čtyřboký hranol *SLMNTPQR*.
Body *S*, *T* jsou po řadě středy hran *KL*, *OP*.
Objem čtyřbokého hranolu *SLMNTPQR* je 24 cm^3.

Jaký je objem kvádru ***KLMNOPQR*****?** C



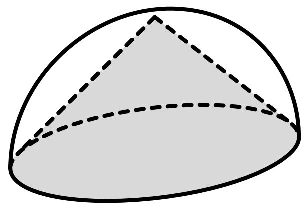
Řešení:

Obsah podstavy *SLMN* čtyřbokého hranolu tvoří tři čtvrtiny obsahu podstavy *KLMN* kvádru, výšky obou těles jsou stejné. Objem hranolu tvoří tedy tři čtvrtiny objemu V kvádru.

$$\frac{3}{4}V = 24\ \text{cm}^3$$
$$V = 32\ \text{cm}^3$$

25.3 Do polokoule je vepsán rotační kužel (podstavy obou těles splývají, vrchol kužele leží na hranici polokoule).
Objem rotačního kužele je 24 cm^3.

Jaký je objem polokoule? F



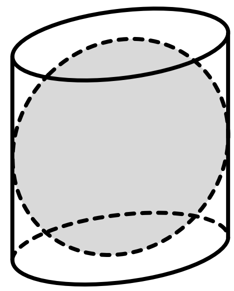
Řešení:

Poloměr podstavy kužele označme r, jeho výška je $v = r$ a poloměr polokoule je r.
Objem kužele označme V_k a objem polokoule V_p.

$$V_\text{k} = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi r^3, \qquad V_\text{k} = 24\ \text{cm}^3$$
$$V_\text{p} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3 = 2V_\text{k} = 48\ \text{cm}^3$$

25.4 Do rovnostranného rotačního válce je vepsána koule (koule se dotýká pláště válce i obou podstav válce). Objem koule je 24 cm^3.

Jaký je objem rotačního válce? ______



Řešení:

Poloměr podstavy rotačního válce označme r, jeho výška je $v = 2r$ a poloměr koule je r. Objem koule označme V_k a objem válce V_v.

$$V_k = \frac{4}{3}\pi r^3, \qquad V_k = 24 \text{ cm}^3$$

$$V_v = \pi r^2 v = 2\pi r^3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{3}{2} V_k = 36 \text{ cm}^3$$

A) menší než 30 cm^3

B) 30 cm^3

C) 32 cm^3

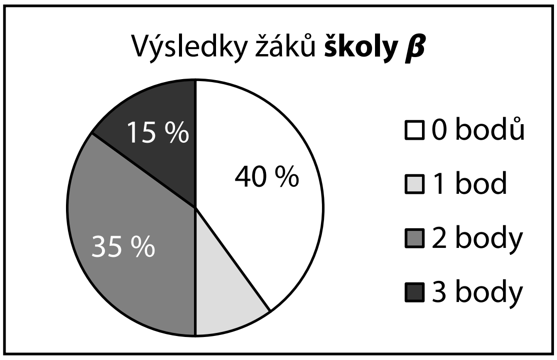
D) 36 cm^3

E) 40 cm^3

F) větší než 40 cm^3

VÝCHOZÍ TEXT, DIAGRAMY A TABULKY K ÚLOZE 26

Všichni žáci tří škol (α, β, γ) se zúčastnili soutěže, v níž každý žák získal 0, 1, 2, nebo 3 body. Výsledky žáků jsou zaznamenány v následujících diagramech a tabulkách.



Výsledky žáků **školy γ**				
Počet bodů	0	1	2	3
Počet žáků		0	25	35

Pro každou školu zvlášť byly z výsledků žáků vypočteny charakteristiky polohy – medián, modus a aritmetický průměr. Ve škole γ byl průměrný počet bodů 1,24. Mezi mediány všech škol se zjistí nejnižší hodnota, stejně tak mezi mody a aritmetickými průměry.

	Medián	Modus	Aritmetický průměr
Škola α			
Škola β			
Škola γ			**1,24**
Nejnižší hodnota			

(*CZVV*)

max. 3 body

26 Přiřaďte ke každé charakteristice polohy (26.1–26.3) výčet všech škol (A–E), které dosáhly nejnižší zjištěné hodnoty této charakteristiky.

26.1 Medián ___C___

26.2 Modus ___E___

26.3 Aritmetický průměr ___A___

A) pouze škola α

B) pouze škola β

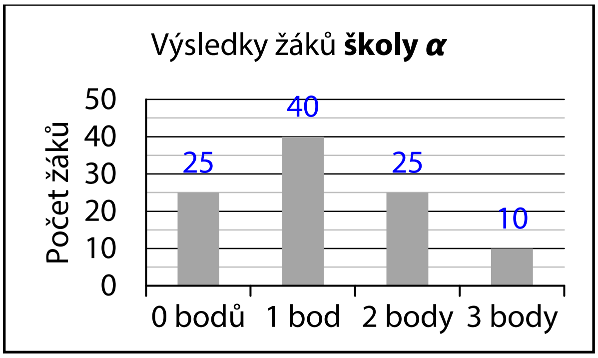
C) pouze škola γ

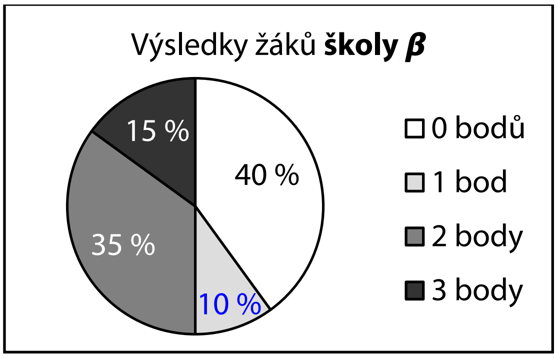
D) škola α i škola β

E) škola β i škola γ

Řešení:

V diagramu školy α určíme počty žáků.
Chybějící relativní četnost 1 bodu v diagramu školy β je 10 % ($100 - 40 - 35 - 15 = 10$).





Počet žáků školy γ, kteří nezískali žádný bod, označme x.

Aritmetický průměr:

$$\frac{x \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 25 \cdot 2 + 35 \cdot 3}{x + 0 + 25 + 35} = 1{,}24$$

$$155 = 1{,}24x + 74{,}4$$

$$x = 65$$

Výsledky žáků **školy** ***γ***				
Počet bodů	0	1	2	3
Počet žáků	65	0	25	35

Pro každou školu určíme všechny požadované charakteristiky polohy.

	Medián	Modus	Aritmetický průměr
Škola α	1	1	1,20
Škola β	1,5	0	1,25
Škola γ	0	0	1,24
Nejnižší hodnota	0 (pouze škola γ)	0 (školy β i škola γ)	1,20 (pouze škola α)

Mediány:

$$\mathrm{Med}(\alpha) = \frac{\alpha_{50} + \alpha_{51}}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

$$\mathrm{Med}(\beta) = \frac{1 + 2}{2} = 1{,}5$$

(Škola β má sudý počet žáků, medián je průměrem poslední hodnoty v první polovině a první hodnoty ve druhé polovině vzestupně uspořádaného souboru.)

$$\mathrm{Med}(\gamma) = \gamma_{\frac{125+1}{2}} = \gamma_{63} = 0$$

Aritmetické průměry:

$$\overline{\alpha} = \frac{25 \cdot 0 + 40 \cdot 1 + 25 \cdot 2 + 10 \cdot 3}{25 + 40 + 25 + 10} = \frac{120}{100} = 1{,}20$$

$$\overline{\beta} = 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 1 + 0{,}35 \cdot 2 + 0{,}15 \cdot 3 = 1{,}25$$

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.