MATEMATIKA ROZŠIŘUJÍCÍ

MATEMATIKA ROZŠIŘUJÍCÍ

MXMVD22C0T01

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

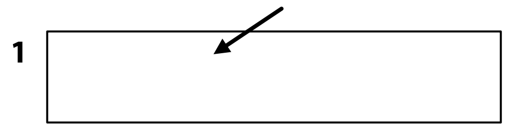
- **Didaktický test** obsahuje **22 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulátor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi pište do záznamového archu.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–11) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 12–22) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** píšící propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

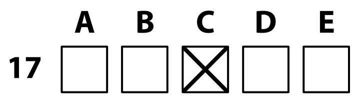
- Výsledky **pište čitelně** do vyznačených bílých polí.



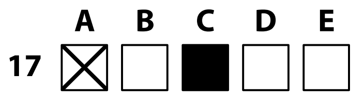
- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapište správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvěte původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

1 bod

1 **Pro $a \in \mathbf{R} \setminus \{0; 1\}$ zjednodušte:**

$$\left(\frac{a^{-1}-1}{a-1}\right)^{-1} =$$

Řešení:

$$\left(\frac{a^{-1}-1}{a-1}\right)^{-1} = \frac{a-1}{\frac{1}{a}-1} = \frac{a(a-1)}{1-a} = \boldsymbol{-a}$$

---

max. 2 body

2 **V oboru R řešte:**

$$2x \cdot \sqrt{x+2} = \sqrt{x+2}$$

Řešení:

$$2x \cdot \sqrt{x+2} = \sqrt{x+2}, \qquad x \in \langle -2; +\infty)$$

$$2x \cdot \sqrt{x+2} - \sqrt{x+2} = 0$$

$$\sqrt{x+2} \cdot (2x-1) = 0$$

$$\sqrt{x+2} = 0 \quad \vee \quad 2x-1 = 0$$

$$x = -2 \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{K} = \left\{ -2; \frac{1}{2} \right\}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

Ve firmě se konalo první kolo konkurzu, v němž každý uchazeč získal 0, 1, 2, nebo 3 body. Poté si každý ze tří vedoucích A, B, C pozval některé uchazeče na osobní pohovor.

Vedoucí A pozval 75 % všech uchazečů, což byli všichni ti, kteří získali 1 nebo 2 body.

Vedoucí B pozval pouze uchazeče, kteří získali 3 body, těch bylo o třetinu méně než uchazečů bez bodu.

Vedoucí C pozval jen uchazeče, kteří získali alespoň 2 body, těch bylo celkem 40 %.

(*CZVV*)

max. 2 body

3 **Vypočtěte,**

3.1 kolik procent všech uchazečů získalo v prvním kole konkurzu 2 body,

3.2 kolik procent všech uchazečů bylo pozváno na jediný pohovor.

Řešení:

Počet všech uchazečů v konkurzu označíme n.
Počty uchazečů pozvaných jednotlivými vedoucími jsou pouze v podbarvených polích.

Pozvánka od vedoucího	Počet uchazečů, kteří získali				Součet
	0 bodů	1 bod	2 body	3 body	
A					$0{,}75n$
B	x			$\frac{2}{3}x$	
(nepozváni od A)	$0{,}15n$			$0{,}1n$	$0{,}25n$
C			$0{,}3n$	$0{,}1n$	$0{,}4n$
A		$0{,}45n$	$0{,}3n$		$0{,}75n$
Podíl uchazečů	15 %	45 %	**30 %**	10 %	

Počet uchazečů bez bodu označíme x.

$n - 0{,}75n = 0{,}25n$

$x + \frac{2}{3}x = 0{,}25n$

$x = 0{,}15n$

$0{,}4n - 0{,}1n = 0{,}3n$

$0{,}75n - 0{,}3n = 0{,}45n$

6.1 Dva body získalo v prvním kole konkurzu **30 %** všech uchazečů.

Pozvánky od		A	A, C	B, C
Počet pozvánek	0	1	2	2
Podíl uchazečů	15 %	**45 %**	40 %	

6.2 Na jediný pohovor bylo pozváno **45 %** všech uchazečů.

---

max. 2 body

4 V oboru R řešte nerovnici:

$$|17 - 2x| \leq 2x$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

pro $x \in \left(-\infty; \frac{17}{2}\right\rangle$: $\quad 17 - 2x \geq 0$

$|17 - 2x| \leq 2x, \qquad |17 - 2x| = 17 - 2x$

$$17 - 2x \leq 2x$$
$$17 \leq 4x$$
$$\frac{17}{4} \leq x$$
$$K_1 = \left\langle \frac{17}{4}; \frac{17}{2} \right\rangle$$

pro $x \in \left(\frac{17}{2}; +\infty\right)$: $\quad 17 - 2x \leq 0$

$|17 - 2x| \leq 2x, \qquad |17 - 2x| = 2x - 17$

$$2x - 17 \leq 2x$$
$$-17 \leq 0$$
$$K_2 = \left(\frac{17}{2}; +\infty\right)$$

$$K = K_1 \cup K_2 = \left\langle \frac{17}{4}; \frac{17}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{17}{2}; +\infty\right)$$

$$\mathbf{K} = \left\langle \mathbf{\frac{17}{4}}; +\infty \right)$$

Jiný způsob řešení:

$0 \leq |17 - 2x| \leq 2x \quad \Rightarrow \quad x \geq 0$

Obě strany nerovnosti jsou pro všechny přípustné hodnoty x nezáporné:

$$|17 - 2x| \leq 2x \quad \Leftrightarrow \quad (17 - 2x)^2 \leq (2x)^2$$

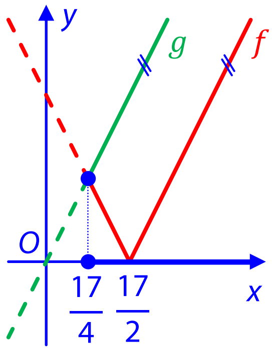
$$289 - 68x + 4x^2 \leq 4x^2$$

$$289 \leq 68x$$

$$x \geq \frac{289}{68} = \frac{17}{4}$$

$\mathbf{K} = \left\langle \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{4}}; +\infty \right)$

Grafické řešení:



$|17 - 2x| \leq 2x \qquad f(x) = |17 - 2x|$

$f(x) \leq g(x) \qquad g(x) = 2x$

Hledáme x-ové souřadnice průsečíků grafů obou funkcí.
Klesající část funkce f má předpis $f_1(x) = -2x + 17$.

$$f_1(x) = g(x)$$

$$-2x + 17 = 2x$$

$$x = \frac{17}{4}$$

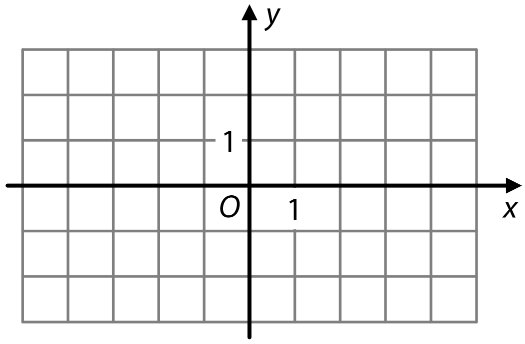
Rostoucí část funkce f má předpis $f_2(x) = 2x - 17$ a její graf je rovnoběžný s grafem funkce $g(x) = 2x$. Další průsečíky grafů funkcí f, g tedy neexistují a z obrázku je patrné, že pro všechna $x \in \left\langle \frac{17}{4}; +\infty \right)$ platí $g(x) \geq f(x)$.

$\mathbf{K} = \left\langle \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{4}}; +\infty \right)$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 5

Pro všechna přípustná $x \in \mathbf{R}$ je dána funkce:

$f: y = (4 - x)^{\frac{1}{2}} - 1$



(CZVV)

max. 2 body

5

5.1 Určete definiční obor funkce f.

Řešení:

$f: y = (4 - x)^{\frac{1}{2}} - 1 = \sqrt{4 - x} - 1$

$4 - x \geq 0$

$x \leq 4$

$\mathbf{D}_f = (-\infty; 4\rangle$

5.2 V kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojte graf funkce f.

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

Řešení:

$f: y = (4 - x)^{\frac{1}{2}} - 1 = \sqrt{4 - x} - 1 = \sqrt{-(x - 4)} - 1$

Vyjdeme z grafu funkce $g(x) = \sqrt{x}$, která je inverzní funkcí k funkci $y = x^2, x \in \mathbf{R}_0^+$.

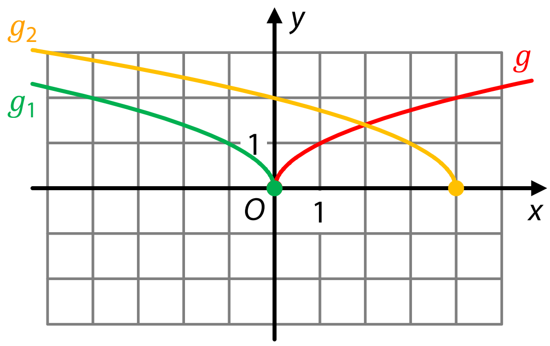
Grafem funkce g je tedy část paraboly s vrcholem v počátku soustavy souřadnic a osou v souřadnicové ose x. Graf funkce g leží v I. kvadrantu souřadnicové soustavy.

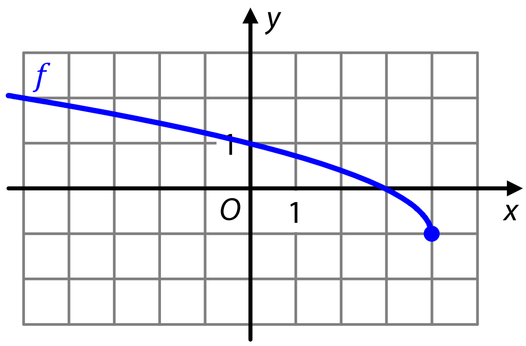
$g(x) = \sqrt{x}$

$g_1(x) = g(-x) = \sqrt{-x}$

$g_2(x) = g_1(x - 4) = \sqrt{-(x - 4)}$

$f(x) = g_2(x) - 1 = \sqrt{-(x - 4)} - 1$





VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 6

Stánek s ovocem byl v tržnici otevřen 3 dny. Před otevřením byl stánek prázdný.

Množství ovoce v kg, které do stánku přivezli v prvním, druhém a třetím dnu v tomto pořadí, bylo v poměru 3 : 2 : 1. Množství ovoce v kg, které v jednotlivých dnech (ve stejném pořadí) ve stánku prodali, bylo v poměru 2 : 3 : 2.

Na konci dne zůstávalo neprodané ovoce ve stánku. Druhý den zbylo ve stánku 60 kg ovoce, třetí den se všechno ovoce prodalo.

(CZVV)

max. 2 body

6 Vypočtěte, kolik kg ovoce

6.1 přivezli do stánku třetí den,

6.2 prodali ve stánku druhý den.

Řešení:

Poměry množství přivezeného i prodaného ovoce rozšíříme tak aby 1 díl přivezeného i prodaného ovoce byl stejný. V obou případech tedy budeme mít 42 stejných dílů.

Poměr množství ovoce	1. den	2. den	3. den	
přivezeného 3 : 2 : 1	21 :	14 :	7	$21 + 14 + 7 = 42$
prodaného 2 : 3 : 2	12 :	18 :	12	$12 + 18 + 12 = 42$
Neprodané ovoce, které na konci dne zůstalo ve stánku	$21 - 12$ $= 9$ (dílů)	$9 + 14 - 18$ $= 5$ (dílů) 60 kg	$5 + 7 - 12$ $= 0$ (dílů)	

5 dílů ... 60 kg
1 díl ... 12 kg
7 dílů ... **84 kg**
18 dílů ... **216 kg**

6.1 Třetí den přivezli do stánku **84 kg** ovoce.

6.2 Druhý den prodali ve stánku **216 kg** ovoce.

Jiný způsob řešení:

Hmotnost ovoce (v kg), které přivezli do stánku třetí den, označíme x, a které toho dne prodali, označíme y.

Hmotnost veškerého přivezeného ovoce (v kg): $3x + 2x + x = 6x$

Hmotnost veškerého prodaného ovoce (v kg): $y + 1{,}5y + y = 3{,}5y$

Řešíme soustavu rovnic:

$6x = 3{,}5y$ Na konci třetího dne ve stánku žádné ovoce nezbylo.

$y = x + 60$ Třetí den se muselo prodat o 60 kg ovoce více, než se přivezlo.

$6x = 3{,}5(x + 60)$

$y = x + 60$

$x = \mathbf{84}$

$y = x + 60 = 84 + 60 = 144$

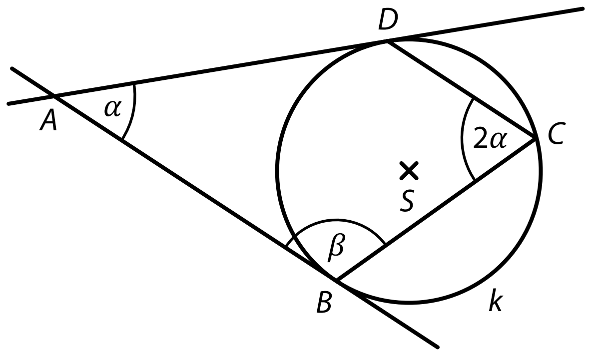
6.1 Třetí den přivezli do stánku **84 kg** ovoce.

6.2 Druhý den prodali ve stánku **216 kg** ovoce ($1{,}5y = 1{,}5 \cdot 144 = \mathbf{216}$).

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

Bod *A* leží ve vnější oblasti kružnice *k* se středem *S*.
Z bodu *A* jsou ke kružnici *k* sestrojeny dvě tečny, které se dotýkají kružnice *k* v bodech *B*, *D*.

Na kružnici *k* leží bod *C*, který je vrcholem **lichoběžníku** *ABCD* se základnami *AB* a *CD*.
V lichoběžníku má vnitřní úhel při vrcholu *A* velikost α, při vrcholu *B* velikost β a při vrcholu *C* velikost 2α.



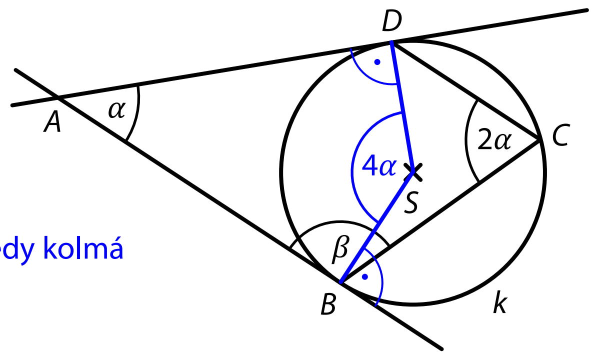
(CZVV)

max. 2 body

7 Vypočtěte

7.1 velikost α,

Řešení:



Středový úhel *BSD* je příslušný k témuž oblouku kružnice *k* jako obvodový úhel *BCD*, tedy platí:

$|\sphericalangle BSD| = 2 \cdot |\sphericalangle BCD| = 4\alpha$

Přímka *AD*, resp. *AB*, je tečnou kružnice *k*, je tedy kolmá na poloměr *SD*, resp. *SB*.

Pro vnitřní úhly ve čtyřúhelníku *ABSD* platí:

$\alpha + 90° + 4\alpha + 90° = 360°$

$\alpha = \mathbf{36°}$

7.2 velikost β.

Řešení:

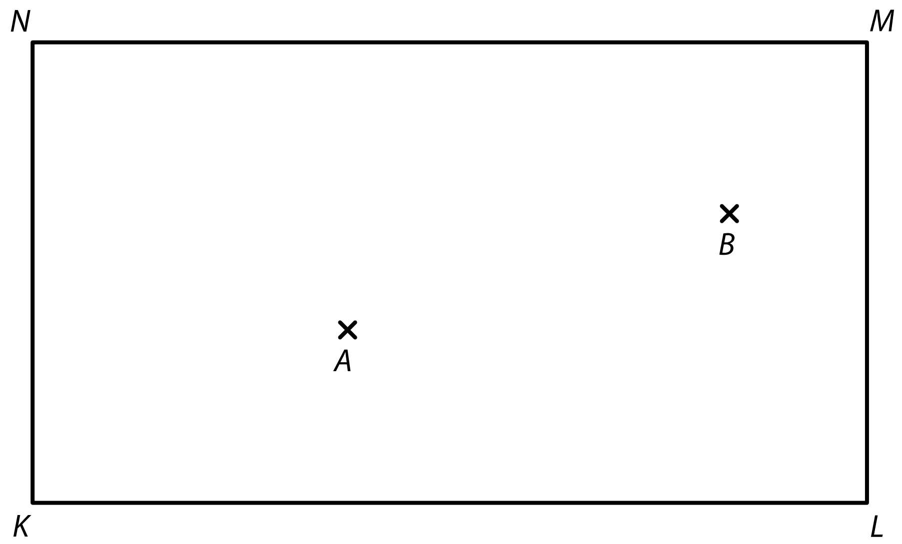
V lichoběžníku *ABCD* platí:

$\beta + 2\alpha = 180°$, $\quad \alpha = 36°$ (viz řešení úlohy 7.1)

$\beta = 180° - 2\alpha = 180° - 2 \cdot 36° = \mathbf{108°}$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

V rovině leží obdélník *KLMN* a jeho dva vnitřní body *A*, *B*.



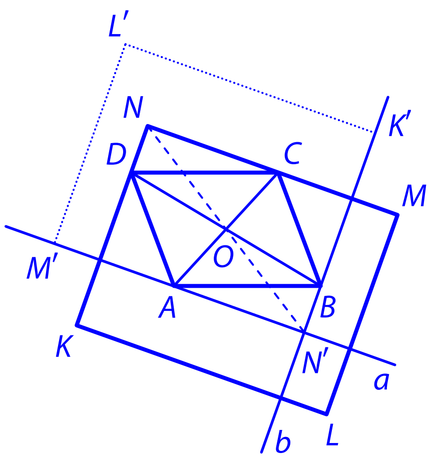
(CZVV)

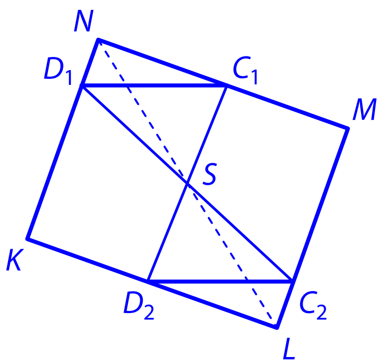
max. 3 body

8 Body *A*, *B* jsou vrcholy rovnoběžníku *ABCD*. Zbývající dva vrcholy *C*, *D* tohoto rovnoběžníku leží na stranách obdélníku *KLMN*.

8.1 Hledáme vrcholy *C*, *D* rovnoběžníku *ABCD*.
Proveďte náčrtek rovnoběžníku *ABCD* a zapište rozbor nebo postup konstrukce.

Řešení:





Bod *O* je střed souměrnosti rovnoběžníku *ABCD*.

$\mathcal{S}(O)$: $KLMN \longrightarrow K'L'M'N'$, přičemž platí buď

I. $C \in MN \;\Rightarrow\; A \in M'N' \;\wedge\; B \in K'N'$, nebo

II. $C \in LM$

I. řešení (viz náčrt)

Hledáme body N', O:

1. $N' \in a \;\wedge\; N' \in b$,
   kde $a \parallel MN \;\wedge\; A \in a$, $\quad b \parallel KN \;\wedge\; B \in b$
2. O je střed NN'

Hledáme body *C*, *D*:

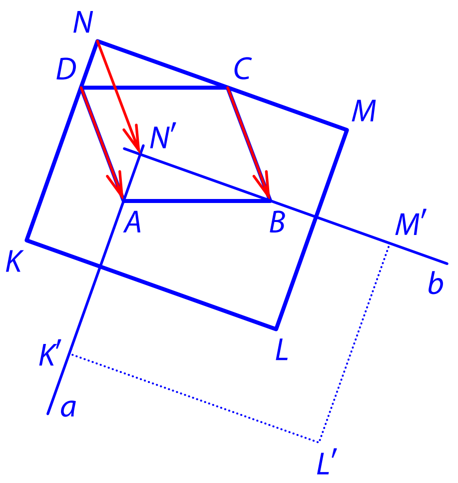
3. $\mathcal{S}(O)$: $A \longrightarrow C$
4. $\mathcal{S}(O)$: $B \longrightarrow D$

II. řešení

Po nalezení bodů C_1, D_1 (I. řešení) lze užít středové souměrnosti se středem *S* obdélníku *KLMN*:

5. $\mathcal{S}(S)$: $C_1 \longrightarrow D_2$
6. $\mathcal{S}(S)$: $D_1 \longrightarrow C_2$

Jiný způsob řešení:



$\mathcal{T}(\overrightarrow{DA})$: $KLMN \longrightarrow K'L'M'N'$, přičemž platí buď

I. $D \in KN \quad \Rightarrow \quad A \in K'N' \quad \wedge \quad B \in M'N'$, nebo

II. $D \in KL \quad \Rightarrow \quad A \in K'L' \quad \wedge \quad B \in L'M'$

I. řešení (viz náčrt)

Hledáme bod N':

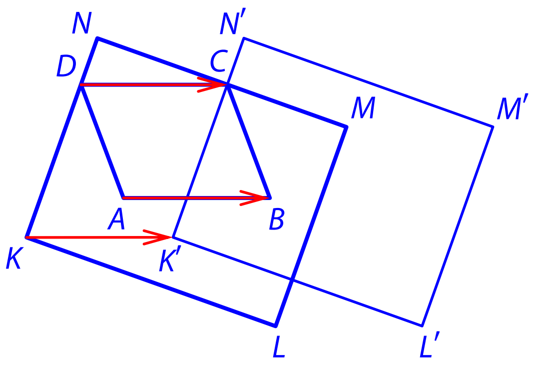
1. $N' \in a \quad \wedge \quad N' \in b$,
   kde $a \parallel KN \quad \wedge \quad A \in a, \quad b \parallel MN \quad \wedge \quad B \in b$

Hledáme body D, C:

2. $\mathcal{T}\left(\overrightarrow{N'N}\right): A \longrightarrow D$
3. $\mathcal{T}\left(\overrightarrow{N'N}\right): B \longrightarrow C$

II. řešení – analogicky najdeme L' a užijeme $\mathcal{T}\left(\overrightarrow{L'L}\right)$

Ještě jiný způsob řešení:



Hranici obdélníku $KLMN$ označíme $KLMNK$.

Hledáme bod C:

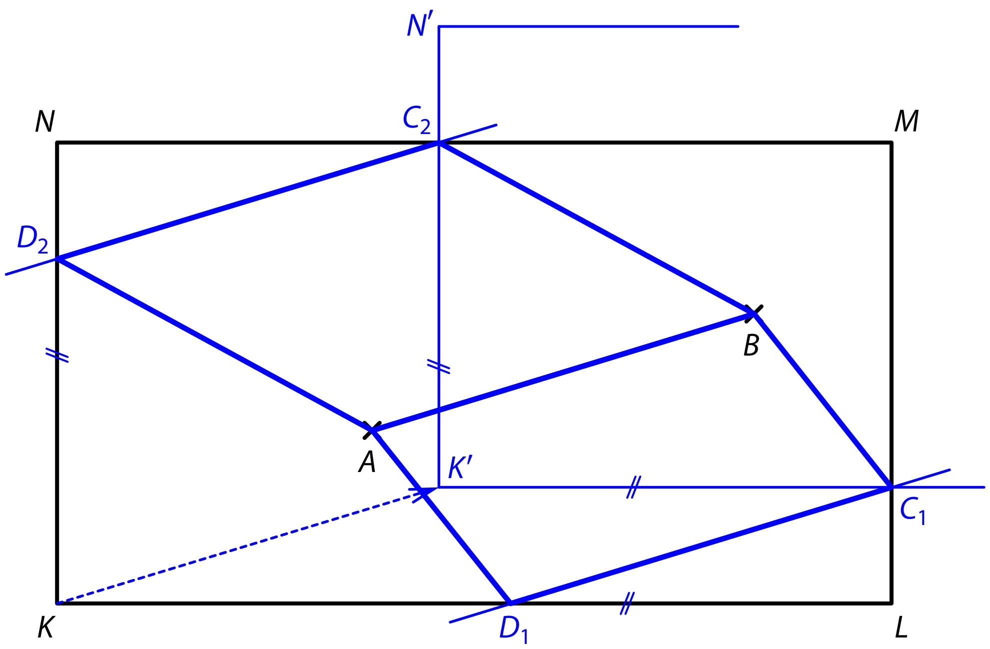
1. $C \in KLMNK \quad \wedge \quad C \in K'L'M'N'K'$,
   kde $\mathcal{T}(\overrightarrow{AB})$: $KLMNK \longrightarrow K'L'M'N'K'$,
   protože $D \in KLMNK \quad \wedge \quad \mathcal{T}(\overrightarrow{AB})$: $D \longrightarrow C$

Hledáme bod D:

2. $\mathcal{T}(\overrightarrow{BA})$: $C \longrightarrow D$

8.2 V obrázku sestrojte chybějící vrcholy rovnoběžníku $ABCD$ a rovnoběžník narýsujte. Najděte všechna řešení.

Řešení (dle rozboru v posledním způsobu řešení úlohy 8.1)**:**



Popis konstrukce:

1. $K'L'M'N'K'$; $\mathcal{T}(\overrightarrow{AB})$: $KLMNK \longrightarrow K'L'M'N'K'$
2. C; $\{C\} = KLMNK \cap K'L'M'N'K'$
3. C; $\mathcal{T}(\overrightarrow{BA})$: $C \longrightarrow D$
4. rovnoběžník $ABCD$

Závěr: Úloha má 2 řešení.

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 9

Nová metoda léčení byla testována na myších. Pravděpodobnost, že léčení touto metodou je úspěšné **alespoň** u jedné ze dvou náhodně vybraných myší, je 0,84.

Výsledky léčení jednotlivých myší jsou na sobě nezávislé.

(*CZVV*)

max. 2 body

9 Vypočtěte pravděpodobnost, že u jedné náhodně vybrané myši bude léčení novou metodou úspěšné.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

Pravděpodobnost,
že léčení je úspěšné alespoň u jedné ze dvou náhodně vybraných myší: 0,84
že léčení je neúspěšné u obou náhodně vybraných myší (opačný jev): $1 - 0{,}84 = 0{,}16$

Jev A: léčení jedné náhodně vybrané myši je úspěšné
Jev A′: opačný jev, tj. léčení jedné náhodně vybrané myši je neúspěšné

Protože výsledky léčení jednotlivých myší jsou na sobě nezávislé, platí:

$0{,}16 = P(\mathrm{A}') \cdot P(\mathrm{A}'), \qquad P(\mathrm{A}') \in \langle 0; 1 \rangle$

$P(\mathrm{A}') = 0{,}4$

$P(\mathrm{A}) = 1 - P(\mathrm{A}') = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

Pravděpodobnost úspěchu při léčení jedné náhodně vybrané myši je 0,6.

Jiný způsob řešení:

Jev A: léčení první náhodně vybrané myši je úspěšné

Jev B: léčení druhé náhodně vybrané myši je úspěšné

Platí: $P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) = x, \qquad x \in \langle 0; 1\rangle$

Pravděpodobnost, že léčení je úspěšné alespoň u jedné z těchto dvou myší:

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}), \qquad P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}84$$

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{B})$$

$$0{,}84 = x + x - x \cdot x$$

$$x^2 - 2x + 0{,}84 = 0, \qquad D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0{,}84 = 0{,}64$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 0{,}8}{2}$$

$$x_1 = 1{,}4 \notin \langle 0; 1\rangle$$

$$x_2 = 0{,}6$$

Pravděpodobnost úspěchu při léčení jedné náhodně vybrané myši je 0,6.

Ještě jiný způsob řešení:

Léčení jednotlivých myší můžeme chápat jako opakování náhodného pokusu, z nichž každý má tytéž dva možné výsledky – úspěch a neúspěch. Pravděpodobnost úspěchu léčení označme p, kde $p \in \langle 0; 1\rangle$, pravděpodobnost neúspěchu je potom $(1 - p)$.

Podle Bernoulliho schématu platí pro dvě opakování takového náhodného pokusu:

$$\binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 + \binom{2}{1} p^1 (1-p)^1 + \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0 = 1$$

Jev $\mathrm{A}_{1,2}$: aspoň jedno ze dvou léčení skončilo úspěchem

$$P(\mathrm{A}_{1,2}) = \binom{2}{1} p^1 (1-p)^1 + \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0$$

$$0{,}84 = 2p(1-p) + p^2$$

$$0{,}84 = 2p - 2p^2 + p^2$$

$$0 = p^2 - 2p + 0{,}84$$

$$0 = (p - 0{,}6)(p - 1{,}4)$$

$$p = 0{,}6 \quad \vee \quad p = 1{,}4 \notin \langle 0; 1\rangle$$

Hledaná pravděpodobnost je 0,6.

případně

Jev A_0: ani jedno ze dvou léčení neskončilo úspěchem

$$P(\mathrm{A}_0) = \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2$$

$$1 - 0{,}84 = (1-p)^2$$

$$0{,}16 = (1-p)^2, \qquad (1-p) \in \langle 0; 1\rangle$$

$$0{,}4 = 1 - p$$

$$p = 0{,}6$$

Hledaná pravděpodobnost je 60 %.

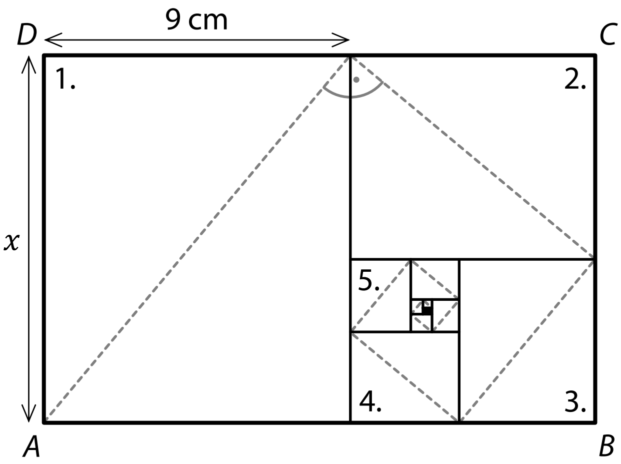
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

Obdélník *ABCD* se skládá z nekonečně mnoha stále se zmenšujících obdélníků (viz obrázek), které jsou v pořadí od největšího očíslovány.

V prvním obdélníku je délka strany *AD* rovna x, délka sousední strany je 9 cm.

V každých dvou po sobě jdoucích obdélnících jsou úhlopříčky vycházející ze společného vrcholu na sebe kolmé. Všechny tyto úhlopříčky tvoří lomenou čáru délky ℓ.

Poměr podobnosti $k \in (0; 1)$ každých dvou po sobě jdoucích obdélníků je konstantní.



(CZVV)

max. 4 body

10

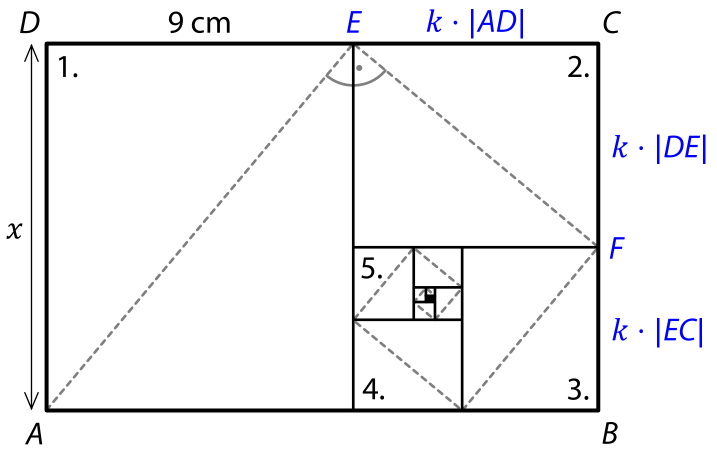
10.1 V závislosti na k vyjádřete délku x strany *AD*.

Řešení:

Platí: $|AD| = x$

$|DE| = 9$ cm

Z podobnosti každých dvou po sobě jdoucích obdélníků plyne (viz obrázek):



$$k = \frac{|EC|}{|AD|} = \frac{|CF|}{|DE|} = \frac{|BF|}{|EC|}$$

$|EC| = k \cdot |AD| = kx$

$|CF| = k \cdot |DE| = k \cdot 9$ cm

$|BF| = k \cdot |EC| = k^2 x$

$$|AD| = |BC| = |BF| + |CF|$$

$$x = k^2 x + k \cdot 9 \text{ cm}$$

$$x \cdot (1 - k^2) = k \cdot 9 \text{ cm}$$

$$x = \frac{9k}{1 - k^2} \text{ cm}$$

10.2 Vypočtěte hodnotu k pro $x = 6$ cm.

Řešení:

Užijeme vztah mezi x a k odvozený v řešení úlohy 10.1.

$$x = \frac{9k}{1-k^2}\ \text{cm}, \qquad x = 6\ \text{cm}, \qquad k \in (0; 1)$$

$$6\ \text{cm} = \frac{9k}{1-k^2}\ \text{cm}$$

$$6 - 6k^2 = 9k$$

$$0 = 2k^2 + 3k - 2$$

$$0 = (2k-1)(k+2)$$

$$k = \frac{1}{2} \quad \vee \quad k = -2 \notin (0; 1)$$

$$k = \frac{1}{2}$$

10.3 Vypočtěte délku ℓ lomené čáry pro $k = 0{,}8$. (Výsledek nezaokrouhlujte.)

Řešení:

Délka strany *AD* prvního obdélníku (užijeme vztah mezi x a k odvozený v úloze 10.1):

$$|AD| = x = \frac{9k}{1-k^2}\ \text{cm}, \qquad k = 0{,}8$$

$$x = \frac{9 \cdot 0{,}8}{1 - 0{,}8^2}\ \text{cm} = 20\ \text{cm}$$

Délka úhlopříčky prvního obdélníku: $u_1 = \sqrt{20^2 + 9^2}\ \text{cm} = \sqrt{481}\ \text{cm}$

Poměr délek úhlopříček každých dvou po sobě jdoucích obdélníků je k.
Číselné hodnoty délek úhlopříček (v cm) jednotlivých obdélníků (v pořadí jejich očíslování) tvoří tedy nekonečnou geometrickou řadu s kvocientem $k \in (0; 1)$.
Délka ℓ (v cm) lomené čáry je součet této řady.

$$\ell = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_1 k^{n-1} = \frac{u_1}{1-k} = \frac{\sqrt{481}\ \text{cm}}{1 - 0{,}8} = 5\sqrt{481}\ \text{cm}$$

V záznamovém archu uveďte ve všech částech úlohy celý **postup řešení**.

max. 3 body

11 Řešte v oboru R:

$$\frac{\cos 2x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

$x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbf{Z}\right\}$

$$\frac{\cos 2x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \Big| \cdot \cos x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x$$

$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x = \sin x$$

$$0 = 2\sin^2 x + \sin x - 1$$

$$0 = (2\sin x - 1)(\sin x + 1)$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \qquad \vee \qquad \sin x = -1$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$x_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbf{Z}$$

$$\mathrm{K} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$$

max. 3 body

12 Přiřaďte ke každé úloze (12.1–12.3) její řešení (A–F).

12.1 Z množiny $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ vybereme tři různé **po sobě jdoucí** číslice a sestavíme z nich trojciferné přirozené číslo.
(Můžeme sestavit např. čísla 201, 567, 897, 987.)

Kolik takových různých trojciferných čísel lze sestavit? C

12.2 Z množiny $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ vybereme tři různé číslice a sestavíme z nich trojciferné přirozené číslo tak, aby jeho číslice byly (zleva) seřazeny sestupně.
(Můžeme sestavit např. čísla 210, 542, 741, 743.)

Kolik takových různých trojciferných čísel lze sestavit? E

12.3 Z množiny $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ vybereme tři různé číslice a sestavíme z nich trojciferné přirozené číslo tak, aby největší z vybraných číslic byla na místě stovek.
(Můžeme sestavit např. čísla 201, 310, 524, 542.)

Kolik takových různých trojciferných čísel lze sestavit? B

A) 36

B) 40

C) 46

D) 52

E) 56

F) jiný počet

Řešení:

12.1 Existuje 8 trojic po sobě jdoucích číslic, a to $\{0; 1; 2\}$, $\{1; 2; 3\}$ až $\{7; 8; 9\}$.
Z první trojice lze sestavit 4 trojciferná přirozená čísla ($2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$; na místě stovek nemůže být číslice 0) a z každé další trojice lze vytvořit 6 čísel ($3! = 6$).

Počet všech trojciferných čísel, která lze sestavit: $4 + 7 \cdot 6 = 46$

12.2 Z libovolné trojice vybraných číslic lze vytvořit právě jedno požadované číslo.

Počet všech trojic z 8 číslic: $\binom{8}{3} = 56$

12.3 Z libovolné trojice vybraných číslic lze vytvořit právě dvě požadovaná čísla (číslice na místě desítek a jednotek lze prohodit).

Počet všech trojic z 6 číslic: $\binom{6}{3} = 20$

Počet všech trojciferných čísel, která lze sestavit: $20 \cdot 2 = 40$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

Je dána rovnice s reálným parametrem p:

$x^2 + py^2 - 16y^2 - p = 0$

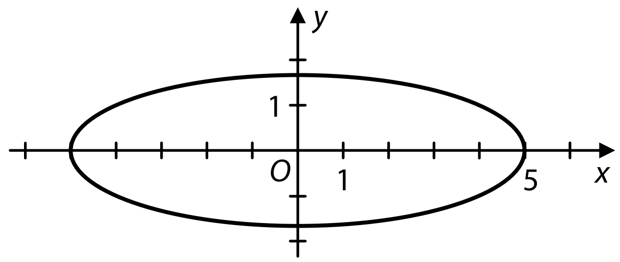
(CZVV)

max. 3 body

13 Každou z následujících množin bodů $X[x; y]$ (13.1–13.3) sestrojených v kartézské soustavě souřadnic Oxy lze popsat uvedenou rovnicí s konkrétní hodnotou parametru p.

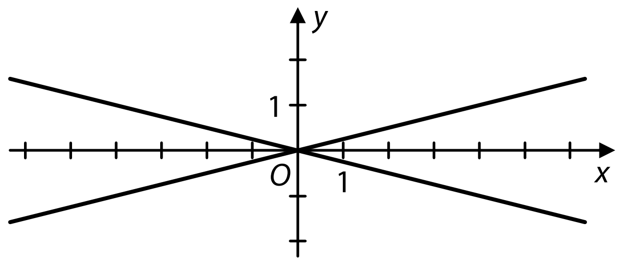
Přiřaďte ke každé množině (13.1–13.3) odpovídající hodnotu parametru p (A–F).

13.1



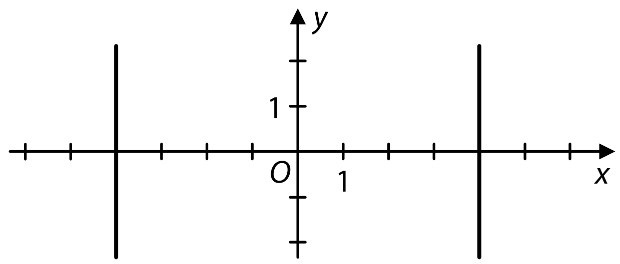
E

13.2



A

13.3



D

A) $p = 0$

B) $p = 4$

C) $p = 9$

D) $p = 16$

E) $p = 25$

F) jiná hodnota

Řešení:

13.1 Elipsa prochází bodem o souřadnicích $[5; 0]$, tedy platí:

$$x^2 + py^2 - 16y^2 - p = 0, \qquad x = 5, \qquad y = 0$$

$$5^2 + p \cdot 0^2 - 16 \cdot 0^2 - p = 0$$

$$p = 25$$

Řešení ověříme dosazením a úpravou rovnice na středový tvar:

$$x^2 + 25y^2 - 16y^2 - 25 = 0$$
$$x^2 + 9y^2 = 25$$
$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} = 1$$

13.2 Přímky procházejí počátkem soustavy souřadnic, tedy platí:

$$x^2 + py^2 - 16y^2 - p = 0, \qquad x = 0, \qquad y = 0$$
$$0^2 + p \cdot 0^2 - 16 \cdot 0^2 - p = 0$$
$$p = 0$$

Řešení ověříme dosazením a úpravou rovnice:

$$x^2 + 0 \cdot y^2 - 16y^2 - 0 = 0$$
$$x^2 - 16y^2 = 0$$
$$(x - 4y)(x + 4y) = 0$$
$$x - 4y = 0 \quad \vee \quad x + 4y = 0$$
$$y = \frac{x}{4} \qquad\qquad y = -\frac{x}{4}$$

13.3 Jedna z přímek prochází bodem o souřadnicích [4; 0], tedy platí:

$$x^2 + py^2 - 16y^2 - p = 0, \qquad x = 4, \qquad y = 0$$
$$4^2 + p \cdot 0^2 - 16 \cdot 0^2 - p = 0$$
$$p = 16$$

Řešení ověříme dosazením a úpravou rovnice:

$$x^2 + (16 - 16)y^2 - 16 = 0$$
$$x^2 - 16 = 0$$
$$(x - 4)(x + 4) = 0$$
$$x = 4 \quad \vee \quad x = -4$$

---

2 body

14 Je dána posloupnost:

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = n^2 - 3n$

Kolik členů a_k dané posloupnosti splňuje podmínku $a_{k+1} - a_k \leq 60$?

A) právě 29 členů

B) právě 30 členů

C) právě 31 členů

D) nekonečně mnoho členů

E) žádný člen

Řešení:

$$a_{k+1} - a_k \leq 60, \qquad a_n = n^2 - 3n$$
$$(k+1)^2 - 3(k+1) - (k^2 - 3k) \leq 60$$
$$2k - 2 \leq 60$$
$$k \leq 31$$

Podmínku splňují členy a_k pro $k \in \mathbf{N}$, $k \leq 31$. Takových členů je 31.

2 body

15 **Jaký je součet všech trojciferných přirozených čísel dělitelných sedmi?**

A) menší než 70 336

B) 70 336

C) 70 784

D) 71 071

E) větší než 71 071

Řešení:

Čísla dělitelná sedmi (násobky čísla 7) tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 7$.

Nejmenší trojciferné přirozené číslo dělitelné sedmi: $a_1 = 105 = 7 \cdot 15$
Největší trojciferné přirozené číslo dělitelné sedmi: $a_n = 994 = 7 \cdot 142$
Počet všech požadovaných násobků čísla 7: $n = 142 - 14 = 128$

Součet prvních n členů aritmetické posloupnosti:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n), \qquad n = 128, \qquad a_1 = 105, \qquad a_{128} = 994$$

$$s_{128} = \frac{128}{2} \cdot (105 + 994) = 70\,336$$

---

2 body

16 Je dán mnohočlen s reálnými proměnnými x, y:

$4xy^2 - 2y^3 + 2x^2 - xy - 4x + 2y$

Který dvojčlen lze vytknout z daného mnohočlenu při rozkladu na součin?

A) $2x + y$

B) $2x - y$

C) $y^2 - 1$

D) $x + 2y^2$

E) $x - 2y$

Řešení:

Postupně vytýkáme:

$4xy^2 - 2y^3 + 2x^2 - xy - 4x + 2y = 2y^2(2x - y) + x(2x - y) - 2(2x - y) =$
$(2x - y)(2y^2 + x - 2)$

Z výrazu lze vytknout dvojčlen $(2x - y)$. Protože získaný trojčlen $(2y^2 + x - 2)$ není možné dále rozložit, jiný dvojčlen při rozkladu výrazu vytknout nelze.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 17

Jsou dány rovnice:

I. $2^{1-x} = -2$

II. $\log_{0,5}(2-x) = -2$

III. $\log_2(2-x) = \log_2(x-5)$

(CZVV)

2 body

17 Která z uvedených rovnic <u>nemá</u> v oboru R řešení?

A) pouze I.

B) pouze II.

C) pouze I. a II.

D) pouze I. a III.

E) I., II. a III.

Řešení:

I. Umocněním čísla 2 není možné získat záporné číslo, tedy ani číslo −2 na pravé straně rovnice. Rovnice tedy v oboru **R** nemá řešení.

II. Argument logaritmické funkce musí být kladný: $2-x>0 \quad \Leftrightarrow \quad x<2$

$$\log_{0,5}(2-x) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2-x$$

$$x = -2, \qquad \mathbf{K} = \{-2\}$$

III. Argument logaritmické funkce musí být kladný:

$2-x>0 \quad \wedge \quad x-5>0$

$x<2 \quad \wedge \quad x>5,$ takové $x \in \mathbf{R}$ neexistuje

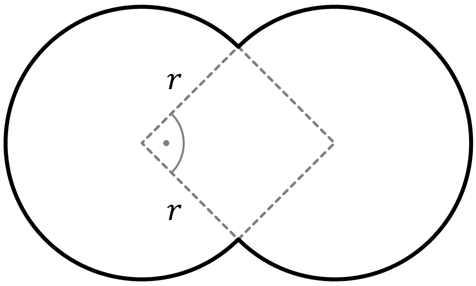
V oboru **R** nemají řešení pouze rovnice I. a III.

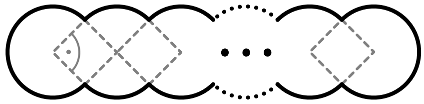
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 18

První obrazec vznikl částečným překrytím kruhu o poloměru r shodným kruhem.

Druhý obrazec vznikl z většího počtu kruhů o poloměru $\frac{1}{3}r$ tak, že druhý a každý další kruh překryl pouze předchozí kruh, a to stejným způsobem jako v prvním obrazci.

Oba obrazce mají **stejný obvod**.





(CZVV)

2 body

18 Z kolika kruhů vznikl druhý obrazec?

A) z 8 kruhů

B) z 10 kruhů

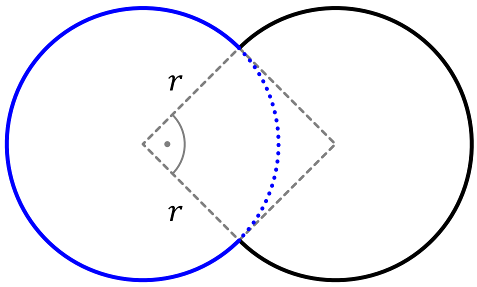
C) z 12 kruhů

D) ze 14 kruhů

E) z jiného počtu kruhů

Řešení:

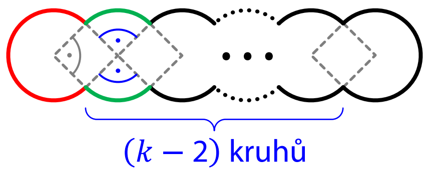
Hranice prvního obrazce se skládá ze 2 shodných oblouků, z nich každý tvoří tři čtvrtiny kružnice o poloměru r.



Obvod prvního obrazce: $o_1 = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2\pi r = 3\pi r$

Počet kruhů, z nichž vznikl druhý obrazec, označíme k.

Obvod druhého obrazce:



$o_2 = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2\pi \frac{r}{3} + (k-2) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi \frac{r}{3}$

$o_2 = \pi r + (k-2) \cdot \pi \frac{r}{3} = (k+1) \cdot \pi \frac{r}{3}$

Obvody obou obrazců jsou stejné:

$o_1 = o_2$

$3\pi r = (k+1) \cdot \pi \frac{r}{3}$

$3 = (k+1) \cdot \frac{1}{3}$

$k = 8$

2 body

19 Krychli je jedna koule vepsána a druhá koule opsána.

Kolikrát je povrch opsané koule větší než povrch vepsané koule?

A) 2krát

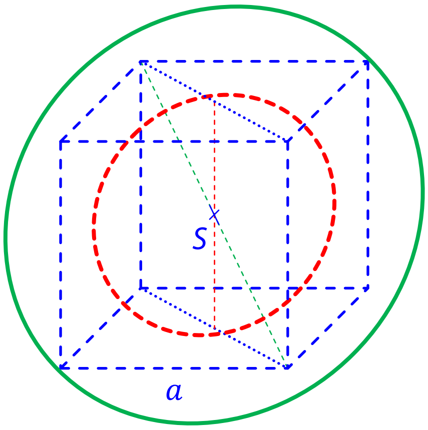
B) $2\sqrt{2}$krát

C) 3krát

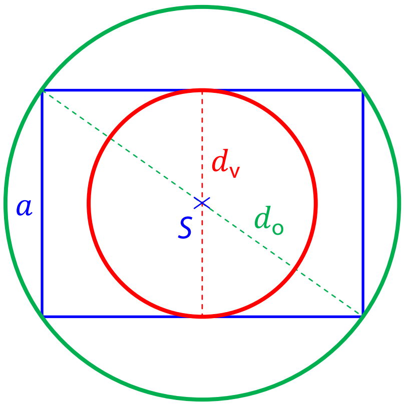
D) $3\sqrt{3}$krát

E) jiný násobek

Řešení:



Úhlopříčný řez



Délku hrany krychle označíme a.

Průměrem koule vepsané krychli je délka hrany krychle: $d_v = a$

Průměrem koule opsané krychli je délka tělesové úhlopříčky: $d_o = a\sqrt{3}$

Povrch koule o poloměru r a průměru d: $S = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi d^2$

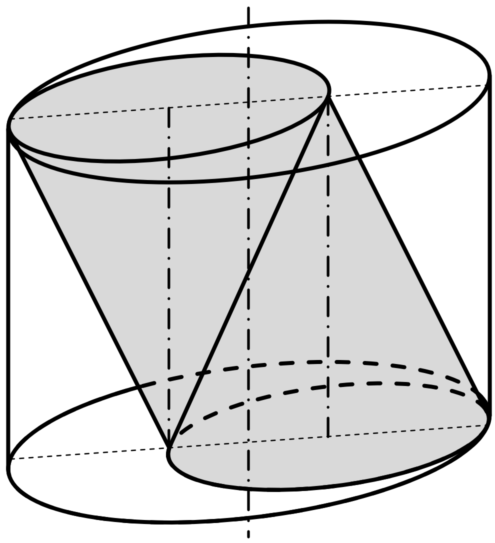
Podíl povrchů koule opsané a koule vepsané krychli: $\frac{S_o}{S_v} = \frac{\pi d_o^2}{\pi d_v^2} = \frac{\pi\left(a\sqrt{3}\right)^2}{\pi a^2} = \frac{3\pi a^2}{\pi a^2} = 3$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 20

Část skleněného rotačního válce tvoří dva shodné rotační kužele z šedého skla.

Každý z kuželů má osu rovnoběžnou s osou válce a podstavu, která leží uvnitř jedné z podstav válce a dotýká se pláště válce.
Kužele mají právě jednu společnou stranu. Tato strana protíná osu válce.

Zbytek válce je z čirého skla.



(CZVV)

2 body

20 Kolik procent objemu válce je z <u>čirého</u> skla?

A) alespoň 40 %, ale méně než 50 %

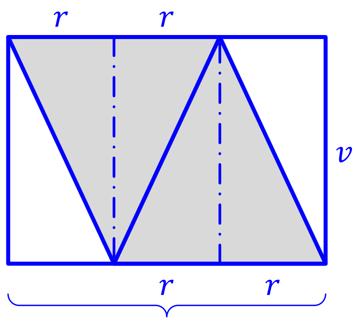
B) alespoň 50 %, ale méně než 60 %

C) alespoň 60 %, ale méně než 70 %

D) alespoň 70 %, ale méně než 80 %

E) alespoň 80 %

Řešení:



Výška válce i kužele je stejná, označíme ji v.
Poloměr podstavy válce označíme R a poloměr podstavy kužele r. Pro poloměry platí (viz obrázek):

$$3r = 2R$$
$$r = \frac{2}{3}R$$

Objem celého válce: $V_v = \pi R^2 v$

Objem jednoho šedého kužele:

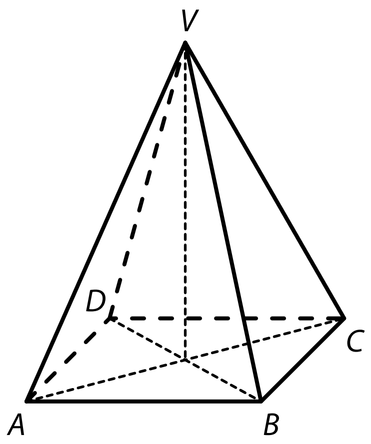
$$V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 v$$
$$V_k = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2}{3}R\right)^2 v = \frac{4}{27}\pi R^2 v = \frac{4}{27}V_v$$

Oba šedé kužele tvoří $\frac{8}{27}$ objemu válce, čiré sklo tedy tvoří $\frac{19}{27}$ objemu válce, což je nepatrně přes 70 % objemu válce.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

V kartézské soustavě souřadnic $Oxyz$ je umístěn pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, pro který platí:

$B[-1; 2; 0]$, $D[3; -2; 2]$, $V[5; 2; -3]$



(CZVV)

2 body

21 Jaká je rovnice roviny *ABC*?

A) $x + 2y + 2z - 3 = 0$

B) $y + 2z - 2 = 0$

C) $x - 2z + 1 = 0$

D) $x - y - 1 = 0$

E) $2x + y - 2z = 0$

Řešení:

Koncovým bodem výšky jehlanu je střed S podstavy $ABCD$, tedy střed úsečky BD: $S[1; 0; 1]$

Normálový vektor $\vec{n}$ roviny ABC určuje orientovaná úsečka $\overrightarrow{SV}$

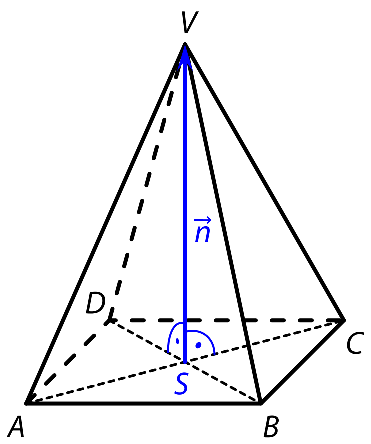
$V - S = (4; 2; -4)$, $\vec{n} = (2; 1; -2)$

Platí:

$\leftrightarrow ABC$: $2x + y - 2z + c = 0$

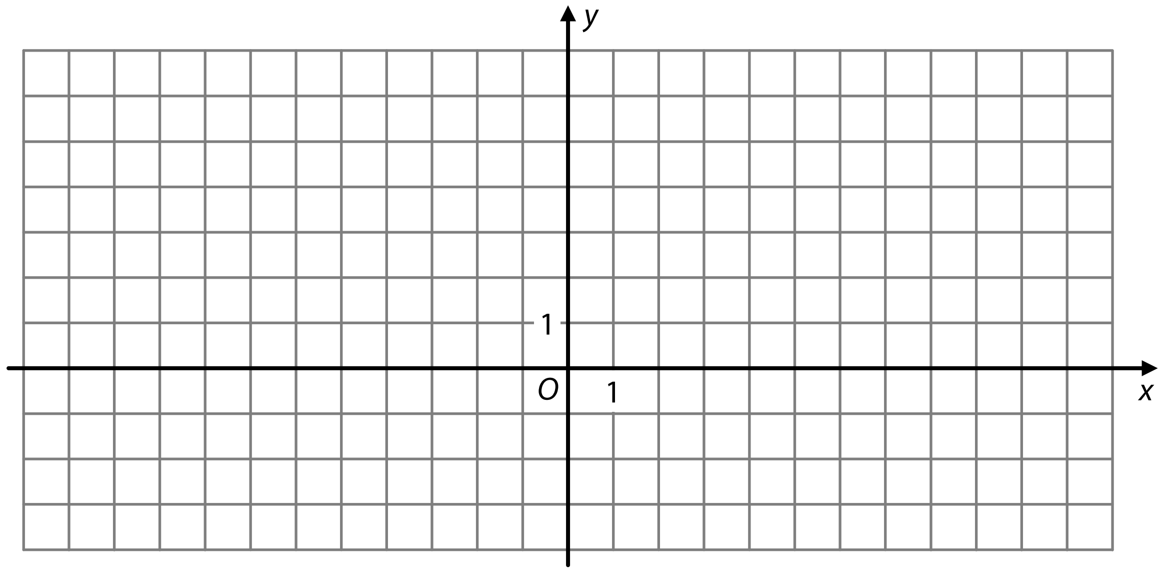
$B \in \leftrightarrow ABC$: $2 \cdot (-1) + 2 - 2 \cdot 0 + c = 0$, $c = 0$

$\leftrightarrow ABC$: $2x + y - 2z = 0$



VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 22

Bod $S[-1; 3]$ je střed kosočtverce $ABCD$.
Strana AB tohoto kosočtverce leží na souřadnicové ose x a vrchol C na souřadnicové ose y.



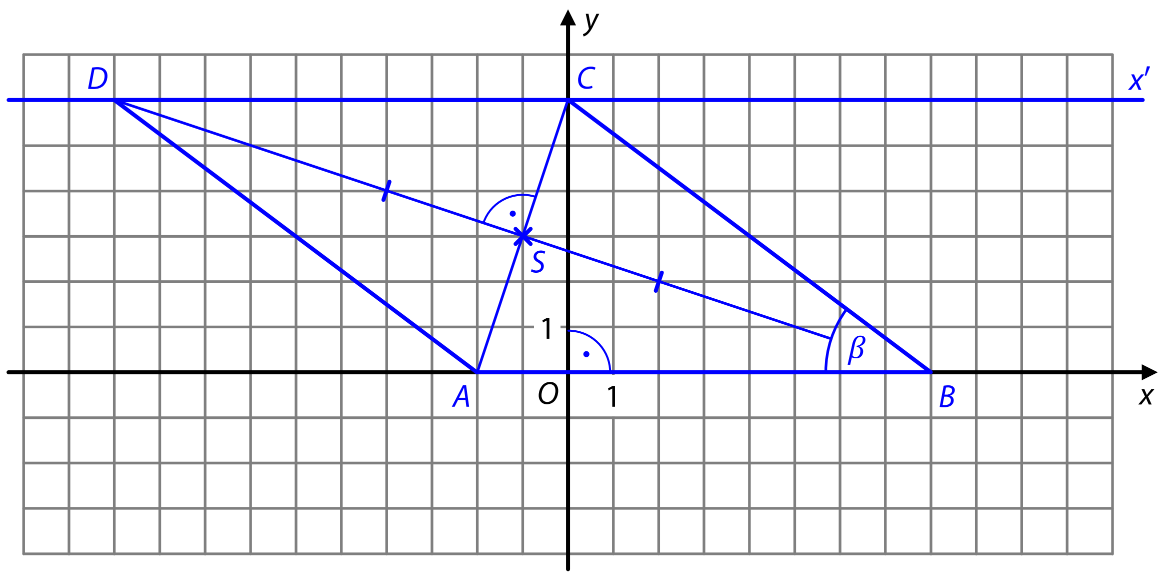
(CZVV)

max. 3 body

22 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (22.1–22.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
22.1	Vzdálenost bodu S od přímky AB je stejná jako od přímky CD.	☒	☐
22.2	$\lvert BD\rvert = 3 \cdot \lvert AC\rvert$	☒	☐
22.3	Obsah kosočtverce je $S_{ABCD} = \frac{3}{5} \cdot \lvert AB\rvert \cdot \lvert BC\rvert$.	☒	☐

Řešení:



22.1 Střed S kosočtverce je středem jeho souměrnosti a současně je středem kružnice kosočtverci vepsané, je tedy stejně vzdálen od všech čtyř přímek, na kterých leží strany kosočtverce.

Tvrzení 22.1 je **pravdivé**.

22.2 Viz obrázek.

$AB \in x, \qquad \mathcal{S}(S): AB \longrightarrow CD$

$C \in y \cap x'$, kde $\mathcal{S}(S): x \longrightarrow x'$

$BD \perp AC$

$A[-2;0]\,, \qquad B[8;0]\,, \qquad C[0;6]\,, \qquad D[-10;6]$

Z obrázku je zřejmé, že tvrzení 22.2 je **pravdivé**.

případně

$$\frac{|BD|}{|AC|} = \frac{\sqrt{(-10-8)^2 + (6-0)^2}}{\sqrt{(-2-0)^2 + (0-6)^2}} = \frac{\sqrt{360}}{\sqrt{40}} = 3$$

Tvrzení 22.2 je **pravdivé**.

22.3 Viz obrázek.

$$S_{ABCD} = |AB| \cdot |BC| \cdot \sin\beta\,, \qquad \sin\beta = \frac{|CO|}{|BC|}, \qquad |BC| = |AB| = 10, \qquad |CO| = 6$$

$$S_{ABCD} = |AB| \cdot |BC| \cdot \frac{|CO|}{|BC|} = |AB| \cdot |BC| \cdot \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \cdot |AB| \cdot |BC|$$

Tvrzení 22.3 je **pravdivé**.