MATEMATIKA ROZŠIŘUJÍCÍ

MXMZD24C0T04

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

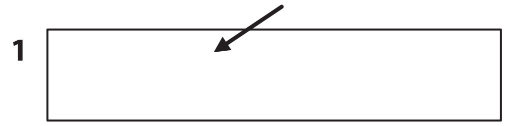
- **Didaktický test** obsahuje **22 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulátor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi pište do záznamového archu.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–11) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 12–22) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** píšící propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

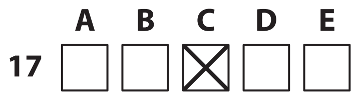
- Výsledky **pište čitelně** do vyznačených bílých polí.



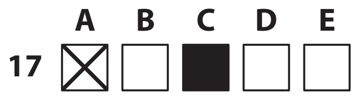
- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapište správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvěte původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

max. 2 body

1 $$\frac{4a^2-1}{(2a-5)(a+1)^2+5+8a}$$

1.1 Určete, pro která $a \in \mathbf{R}$ má daný výraz smysl.

1.2 Výraz zjednodušte.

---

max. 2 body

2 Najděte všechna celá nezáporná čísla *m*, pro něž má posloupnost vlastní limitu.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n^m}{5n^3-1}$$

---

max. 2 body

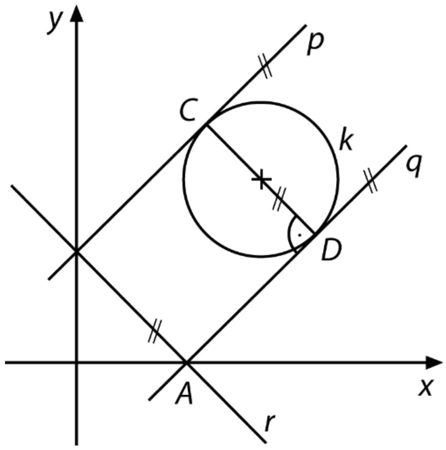
3 Určete všechna $x \in (-\infty, 0\rangle$, která vyhovují rovnici

$$\frac{5}{|x|+1}=|x+3|$$

Do záznamového archu uveďte celý **postup řešení**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 4

V kartézské soustavě souřadnic je dána přímka *p* s obecnou rovnicí $y-x-2=0$, přímka *q*, přímka *r*, kružnice *k* a bod $A[2;0]$.
Přímka *q* prochází bodem *A* a je rovnoběžná s přímkou *p*.
Přímky *p* i *q* jsou tečnami kružnice *k*. Přímka *r* prochází bodem *A* a je rovnoběžná s vyznačenou úsečkou *CD*, jejíž délka je rovna průměru *d* kružnice *k*.



max. 3 body

4

4.1 Napište **parametrické vyjádření** přímky *q*.

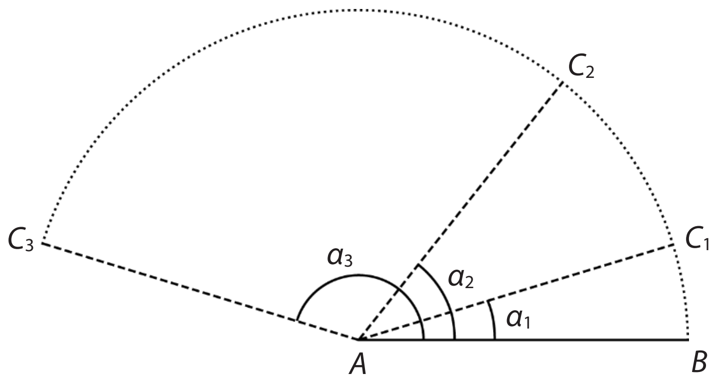
4.2 Napište **obecnou rovnici** přímky *r*.

4.3 Vypočtěte průměr *d*.

(Obrázek je pouze ilustrační.)

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 5

Na obrázku jsou znázorněny vrcholy trojúhelníků ABC_k a úhly α_k pro $k \in \{1, 2, 3\}$.



1 bod

5 Najděte **vztah** pro výpočet délky strany BC_k k-tého rovnoramenného trojúhelníku ABC_k v závislosti na zvoleném úhlu $\alpha_k \in (0; \pi)$, jestliže platí:
$|AB| = |AC_k| = 5$ cm, přičemž $k \in \{1, 2, 3\}$.

---

max. 2 body

6 Řešte soustavu rovnic pro neznámé $a, b \in \mathbf{R}$ a $\alpha = 60°$.

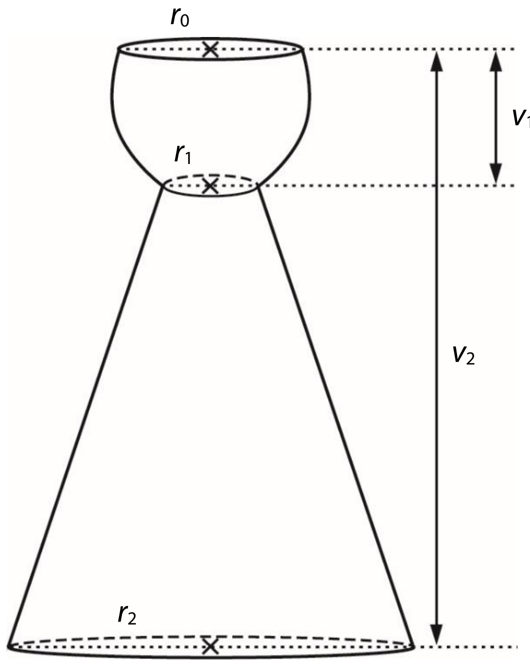
$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = b + \sqrt{a}$$

$$\frac{\alpha}{180°} = \frac{3}{4}b^2$$

Do záznamového archu uveďte celý **postup řešení**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

Váza se skládá ze dvou částí. Spodní část vázy má tvar komolého kužele. Horní část vázy má tvar kulové vrstvy. Obě části mají společnou podstavu.



Rozměry označené na obrázku (vnitřní rozměry vázy):

výška $v_1 = 4{,}5$ cm
výška $v_2 = 20$ cm
poloměr $r_0 = 2{,}75$ cm
poloměr $r_1 = 2{,}0$ cm
poloměr $r_2 = 5{,}5$ cm

max. 3 body

7

7.1 Vypočtěte objem vody V_0, který pojme váza z výchozího textu, jsou-li obě její části naplněny až po horní okraj.

Výsledek uveďte v litrech s přesností na **jedno desetinné místo**.

7.2 Najděte vnitřní poloměr r podstavy takové válcové vázy, která má stejnou výšku a stejný objem jako váza z výchozího textu.

Výsledek uveďte v centimetrech s přesností na **jedno desetinné místo**.

Mezivýsledky nezaokrouhlujte.
Do záznamového archu uveďte u obou podúloh celý **postup řešení**.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 8

Je dána geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, přičemž $a_1 = 8$ a $a_6 = \frac{1}{4}$. Členy a_n této posloupnosti jsou tvořeny vybranými hodnotami exponenciální funkce $f(x)$ pro $x = n$.

max. 2 body

8

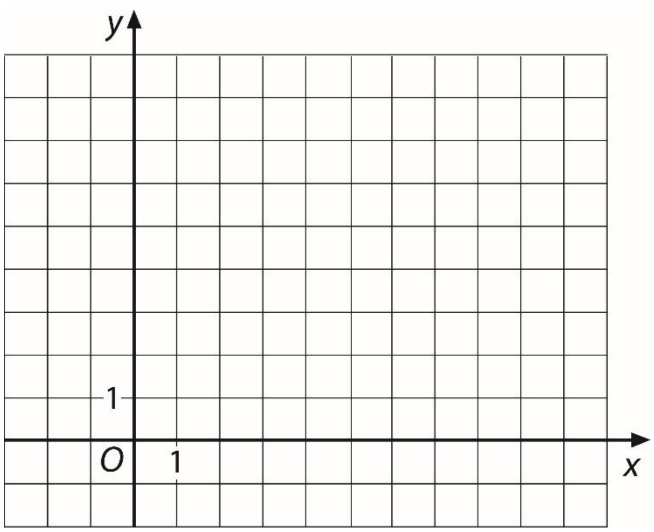
8.1 Najděte **předpis** funkce $f(x)$ z výchozího textu, víte-li, že tímto předpisem je funkce definovaná pro všechna $x \in \mathbf{R}$.

8.2 Uvažujte funkci $h(x) = \begin{cases} a_1, & -2 \le x \le 1 \\ f(x), & 1 \le x \end{cases}$

Zakreslete graf funkce $h(x)$ do čtvercové sítě pro $x \in \langle -2; 6 \rangle$.

Vyznačte body $[n; a_n]$ pro $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

V záznamovém archu obtáhněte řešení (tj. graf funkce a všechny body) propisovací tužkou.



2 body

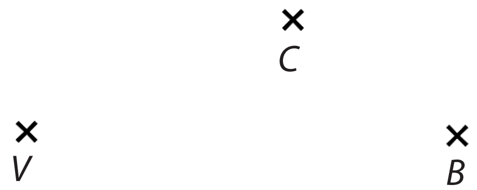
9 Uvažujte funkci s předpisem

$$f : y = \frac{ax + b}{x - c}, x \in \mathbf{R} \setminus \{c\}$$

Určete hodnoty parametrů *a, b* a *c* tak, aby platilo: *f* je lichá a není konstantní. Najděte všechny možnosti.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

V rovině jsou dány body *B*, *C* a *V*.



max. 3 body

10 Na ose konvexního úhlu *BVC* leží body *M* a *N* a platí, že $|VM| = 5$ cm a $|MN| = \frac{1}{2}|VM|$.

10.1 Sestrojte body *M*, *N* a narýsujte nekonvexní čtyřúhelník *VBPN* osově souměrný podle osy *o*, která prochází body *B* a *N*. **Najděte všechna řešení.**

10.2 Zapište postup konstrukce.

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 11

Jsou dány elipsa ε: $4x^2 + 9y^2 - 32x - 108y + 352 = 0$ a přímka p: $y = 5$. Dále je dán vektor posunutí elipsy ve směru osy y: $\vec{v} = (0, t)$, kde $t \in \mathbf{R}$.

max. 3 body

11 Určete, jakých všech hodnot může nabývat souřadnice t vektoru posunutí $\vec{v}$, aby přímka p neprotínala elipsu ε v žádném bodě.

Do záznamového archu uveďte celý **postup řešení.**

max. 3 body

12 Přiřaďte ke každé podúloze (12.1–12.3) odpověď (A–F), která jednoznačně vyplývá ze zadání.

12.1 Délka hlavní poloosy hyperboly je 2. Souřadnice y středu hyperboly je 6. Určete délku vedlejší poloosy hyperboly.

____

12.2 Určete, kolikrát je průměr první kružnice větší než průměr druhé kružnice, pokud obvod první kružnice je devětkrát větší než obvod druhé kružnice.

____

12.3 Bod $Q[-2; 6]$ je jedním z hlavních vrcholů elipsy. Jeden z jejích vedlejších vrcholů je totožný s počátkem soustavy souřadnic. Určete, kolikrát je třeba zmenšit délku hlavní poloosy elipsy, aby se z elipsy stala kružnice.

____

- A) 2
- B) 3
- C) 4
- D) 6
- E) 9
- F) K jednoznačnému určení chybí údaj.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

V tombole se hraje o hlavní cenu v podobě zájezdu k moři. Losuje se jen tato hlavní cena. Tomboly se účastní 49 lidí, z nichž 3 koupili po 4 lístcích, 2 koupili po 3 lístcích, 16 po 2 lístcích a zbytek po 1 lístku. Každý účastník koupil daný počet lístků pouze sám pro sebe. Každý koupený lístek je soutěžní a má stejnou pravděpodobnost výhry. Do tomboly jsou zařazeny pouze všechny koupené lístky.

max. 3 body

13 Přiřaďte ke každé podúloze (13.1–13.3) odpovídající výsledek (A–F).

13.1 Jaká je pravděpodobnost, že Jan vyhraje hlavní cenu, pokud patří do skupiny s nejvyšším počtem koupených lístků **na jednotlivce**? ________

13.2 Tereza si koupila dva lístky. Kdyby si Tereza koupila o tři lístky víc, jaká by byla pravděpodobnost její výhry? (Předpokládejte, že počet ostatních koupených lístků zůstane stejný.) ________

13.3 Moderátor oznamuje, že výhercem se stal jeden z těch, kteří si koupili pouze jeden lístek. Jaká je pravděpodobnost, že z této skupiny účastníků vyhráli manželé Svobodovi (žena i muž koupili každý právě jeden lístek)? ________

Výsledky vyjádřete v procentech a zaokrouhlete na jednotky procent.

A) 3 %

B) 4 %

C) 5 %

D) 6 %

E) 7 %

F) 10 %

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

Pomocí vztahu pro výpočet hustoty tělesa $\rho = \frac{m}{V}$, kde m je hmotnost tělesa a V je jeho objem, lze odvodit vzorec pro výpočet poloměru r koule o hmotnosti $m_0 > 0$, jejíž hustota je rovna polovině rozdílu hustot $\rho_1 > 0$ a $\rho_2 > 0$ dvou koulí.

2 body

14 Která z následujících možností představuje vzorec popsaný ve výchozím textu?

A) $r = \dfrac{3m_0}{2\pi(\rho_1 - \rho_2)}$

B) $r = \dfrac{2\pi|\rho_1 - \rho_2|}{3m_0}$

C) $r = \sqrt[3]{\dfrac{2\pi(\rho_1 - \rho_2)}{3m_0}}$

D) $r = \sqrt[3]{\dfrac{3m_0}{2\pi|\rho_1 - \rho_2|}}$

E) $r = \sqrt[3]{\dfrac{2|\rho_1 - \rho_2|}{3\pi \cdot m_0}}$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15

Jsou dány intervaly $(-\infty, K\rangle$, $\langle L, +\infty)$ a (a, b), přičemž $K > L$, $a < b$; $K, L, a, b \in \mathbf{R}$.

Množina $\mathrm{M} = (-\infty, K\rangle \cap \langle L, +\infty)$.

2 body

15 Které z následujících tvrzení <u>není</u> ve sporu s výchozím textem pro libovolnou čtveřici reálných čísel *K, L, a, b*?

A) Existuje K, pro které $\mathrm{M} = \emptyset$.

B) $(a, b) \cap \mathrm{M} \neq \emptyset \Leftrightarrow (a < L \wedge b < K)$

C) $(a, b) \subset \langle K, +\infty) \Rightarrow (a, b) \cap \mathrm{M} \neq \emptyset$

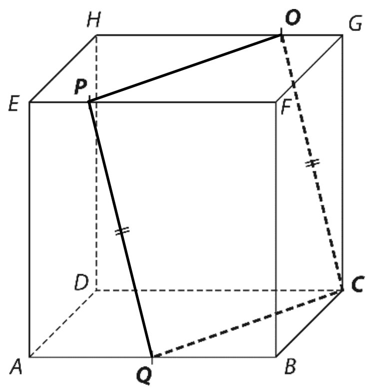
D) $(a < L \wedge b > K) \Rightarrow (a, b) \subset \langle L, +\infty)$

E) $\mathrm{M} \cap (a, b) = (a, K\rangle \Leftrightarrow [(a, b) \subset \langle L, +\infty) \wedge b > K]$

2 body

16 Který z následujících obrázků <u>nepředstavuje</u> řez krychle *ABCDEFGH* rovinou určenou body *O, P a Q*? Bod *S* leží ve středu a bod *R* ve čtvrtině délky dané hrany od jejího krajního vrcholu.

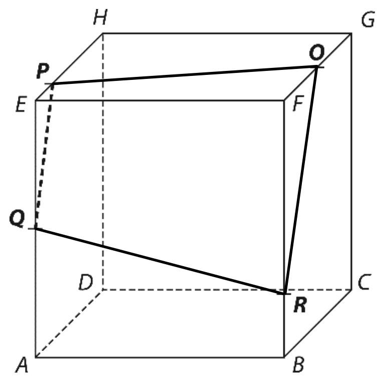
A)



$O \in GH$, $P \in EF$, $Q \in AB$,

$|GO| = \frac{1}{4}|GH|$, $|EP| = \frac{1}{4}|EF|$, $|AQ| = \frac{1}{2}|AB|$

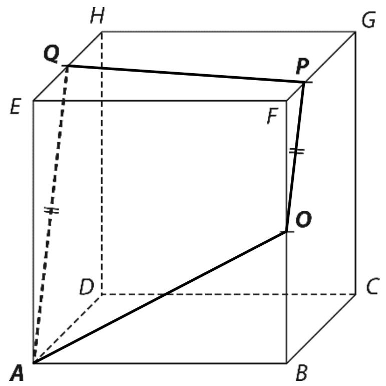
B)



$O \in FG$, $P \in EH$, $Q \in AE$, $R \in BF$,

$|FO| = \frac{1}{2}|FG|$, $|EP| = \frac{1}{4}|EH|$, $|AQ| = \frac{1}{2}|AE|$

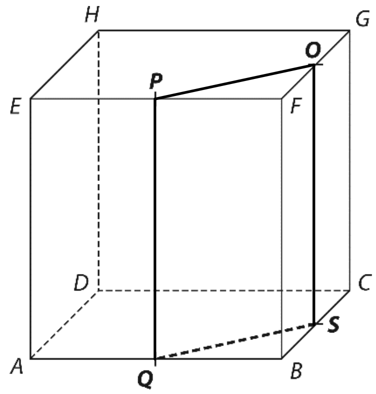
C)



$O \in BF$, $P \in FG$, $Q \in EH$,

$|BO| = \frac{1}{2}|BF|$, $|FP| = \frac{1}{4}|FG|$, $|EQ| = \frac{1}{2}|EH|$

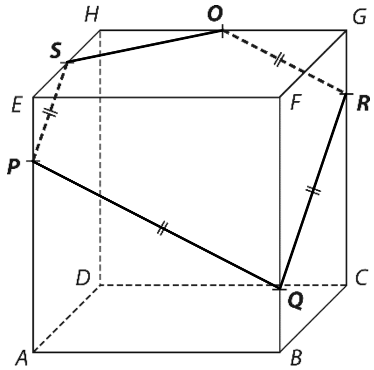
D)



$O \in FG$, $P \in EF$, $Q \in AB$, $S \in BC$,

$|FO| = \frac{1}{2}|FG|$, $|EP| = \frac{1}{2}|EF|$, $|AQ| = \frac{1}{2}|AB|$

E)

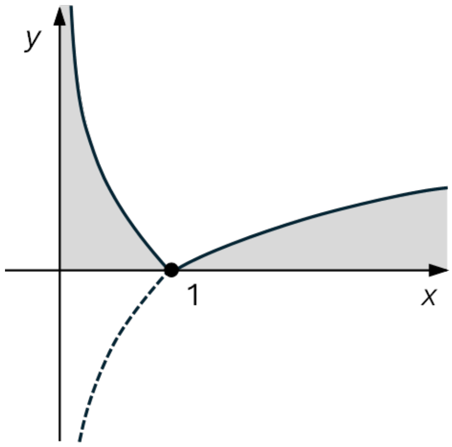


$O \in GH$, $P \in AE$, $Q \in BF$, $R \in CG$, $S \in EH$,

$|GO| = \frac{1}{2}|GH|$, $|EP| = \frac{1}{4}|AE|$, $|BQ| = \frac{1}{4}|BF|$

2 body

17 **Která z níže uvedených možností popisuje šedou plochu ohraničenou křivkou (graf funkce) a souřadnicovými osami *x* a *y* v prvním kvadrantu?** (Obrázek je pouze ilustrační. Předpokládejte, že osy, křivka i šedá plocha pokračují do nekonečna.)



A) $0 \le y < \log_5 x$ pro $x \in (0, +\infty)$

B) $0 \le y \le |\log_5 x|$ pro $x \in (0, +\infty)$

C) $0 \le y \le |e^{-5x} - 1|$ pro $x \in (0, +\infty)$

D) $0 \le y \le e^{-5x}$ pro $x \in (0,1\rangle \quad \wedge \quad 0 \le y \le \log_5 x$ pro $x \in (1, +\infty)$

E) $0 \le y \le x^{-5}$ pro $x \in (0,1\rangle \quad \wedge \quad 0 \le y \le \log_5 x$ pro $x \in (1, +\infty)$

---

2 body

18 **Se kterým z následujících výrazů je pro *x, y* $\in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$ ekvivalentní výraz** $\dfrac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2\cos x \cos y} \cdot \dfrac{\sin 2x}{2\cos^2 x}$ **?**

A) 0

B) $\dfrac{\sin y}{\cos^2 x}$

C) $\mathrm{tg}x$

D) $\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}y$

E) $\mathrm{tg}^2 x$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 19

Součet s_k prvních k členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je roven sumě $\sum_{n=1}^{k} n$, kde $k \in \mathbf{N}$. Pro aritmetickou posloupnost $(b_m)_{m=1}^{\infty}$ platí: $b_1 = 7$, diference $d = -\frac{1}{2}$.

2 body

19 Která z následujících možností obsahuje právě všechna $n \in$ N, pro něž existuje nějaké $m \in$ N takové, že platí $a_n = b_m$?

A) 5

B) 7

C) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

D) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

E) Takové n neexistuje.

---

2 body

20 Jsou dána komplexní čísla $z_1 = \frac{1}{4i}$ a $z_2 = 2 \cdot \left[\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right]\right.$.

Který z následujících číselných výrazů odpovídá absolutní hodnotě komplexního čísla $\frac{z_2}{z_1}$?

A) 8

B) 4

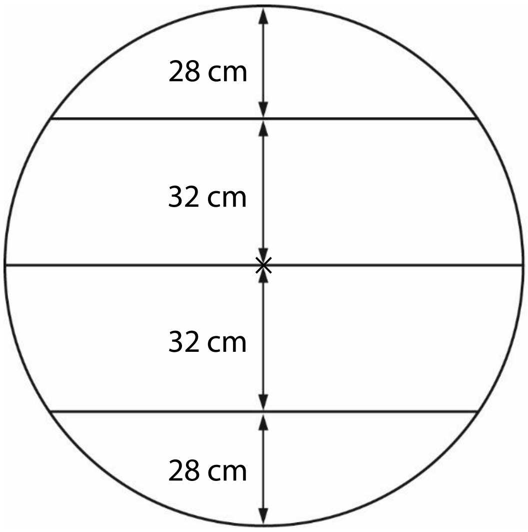
C) $\frac{\sqrt{3}+1}{16}$

D) $\frac{1}{4(\sqrt{3}+1)}$

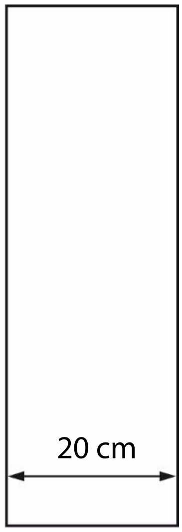
E) $\frac{1}{8}$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Nástěnná dřevěná knihovna se skládá ze tří obdélníkových polic, zadní kruhové desky a boční stěny, kterou tvoří plášť válce. Rozměry knihovny jsou uvedeny na obrázku. Symbol × značí střed knihovny. Délka každé police je znázorněná na obrázku. Šířka každé police je 20 cm.



pohled zepředu



pohled z boku

2 body

21 Kolik cm² dřeva je potřeba na výrobu této knihovny? (Odřezky a tloušťku materiálu neuvažujte.)

Mezivýsledky nezaokrouhlujte a výslednou plochu zaokrouhlete na desítky.

A) 23 280

B) 24 110

C) 24 190

D) 25 190

E) 25 310

max. 3 body

22 Jsou dána kombinační čísla $A = \binom{8}{4}$ a $B = \binom{8}{k}$, kde k je celé nezáporné číslo a $k \leq 8$.

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (22.1–22.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
22.1	Rovnice $(A^2 - 4\,900)x = 0$ pro neznámou $x \in \mathbf{R}$ má právě jeden kořen.	☐	☐
22.2	Pro $k = 5$ platí, že $\frac{B}{A} = 0{,}8$.	☐	☐
22.3	Největší možná hodnota součinu $A \cdot B$ nastává pro $k = 4$.	☐	☐

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.