

# MATEMATIKA ROZŠIŘUJÍCÍ

MXMZD24C0T01

## DIDAKTICKÝ TEST

**Maximální bodové hodnocení: 50 bodů**  
**Hranice úspěšnosti: 33 %**

### 1 Základní informace k zadání zkoušky

- **Didaktický test** obsahuje **22 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je uveden na záznamovém archu.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulátor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi píšete do záznamového archu.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–11) **tvoří úlohy otevřené.**
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 12–22) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná.**
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body.**

### 2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** píšící propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně.**
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu.**

### 2.1 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.

17 

A	B	C	D
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvíte původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.

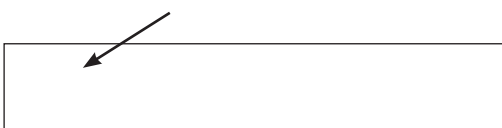
17 

A	B	C	D
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- Jakýkoli jiný způsob záznamu odpovědi a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

### 2.2 Pokyny k otevřeným úlohám

- Výsledky **píšete čitelně** do vyznačených bílých polí.

1 

- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny.**
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapište správné řešení.

**TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!**

1 bod

1 Pro  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$  zjednodušte:

$$\frac{(5x - 1)^{-2}}{(1 - 5x)^{-3}} - 1 =$$

---

1 bod

2 Pro všechny přípustné hodnoty reálné proměnné  $x$  je dán výraz:

$$\frac{3x^2 + 11x - 4}{3x^2 - 10x + 3}$$

Určete všechny hodnoty  $x$ , pro které je hodnota daného výrazu rovna nule.

---

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

Cestovní kancelář nakoupila všechna hotelová místa za jednotnou cenu.

Nákupní cena každého místa byla o 60 % nižší než prodejní cena, kterou za toto místo cestovní kancelář utržila.

Cestovní kanceláři se podařilo prodat pouze 80 % všech nakoupených míst.

1 bod

3 Vypočtete, o kolik procent více cestovní kancelář utržila za prodaná místa, než zaplatila za nákup všech hotelových míst.

## VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 4

Propiska stála  $p$  korun, poté byla zlevněna o  $2p$  procent ( $p \in \mathbf{N}$ ), a nyní tak stojí 12 korun.

max. 2 body

- 4 **Určete, kolik korun mohla propiska stát před zlevněním.**  
Najděte všechna řešení.

---

max. 2 body

- 5 Je dána rovnice s neznámou  $x$  a parametrem  $m \in \mathbf{R}$ :

$$\frac{2x + m + 1}{x - 1} = m$$

**Určete všechny hodnoty parametru  $m$ , pro něž má daná rovnice v oboru  $\mathbf{R}$  právě jedno řešení.**

**V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.**

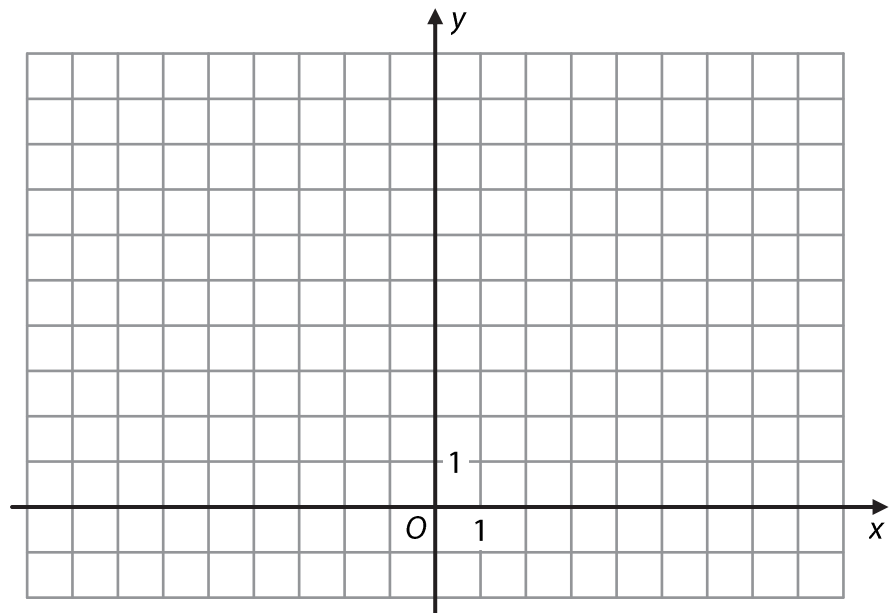
## VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 6

Pro všechna  $x \in \mathbf{R}$   
jsou dány tři funkce:

$$f_1(x) = 4 + \frac{x}{2}$$

$$f_2(x) = 6 - \frac{x}{2}$$

$$f_3(x) = 4 - x$$



**max. 2 body**

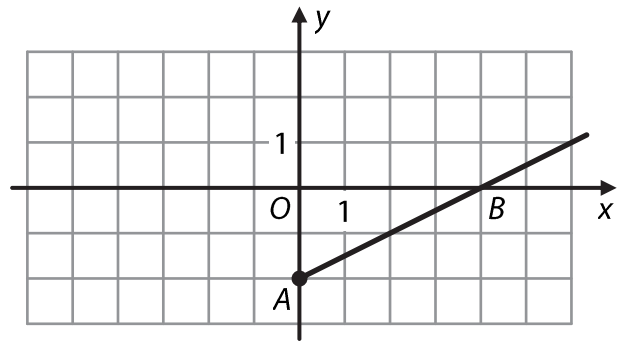
- 6** Pro některá čísla  $a$  platí, že funkční hodnoty  $f_1(a)$ ,  $f_2(a)$  a  $f_3(a)$  jsou čísla **celá, kladná** a navzájem **různá**.

**Určete všechna taková čísla  $a$ .**

## VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 7

V kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  je zakreslena polopřímka  $AB$ , která představuje **část** grafu **sudé** funkce  $g$ .

Body  $A, B$  jsou mřížové.



**max. 2 body**

**7**

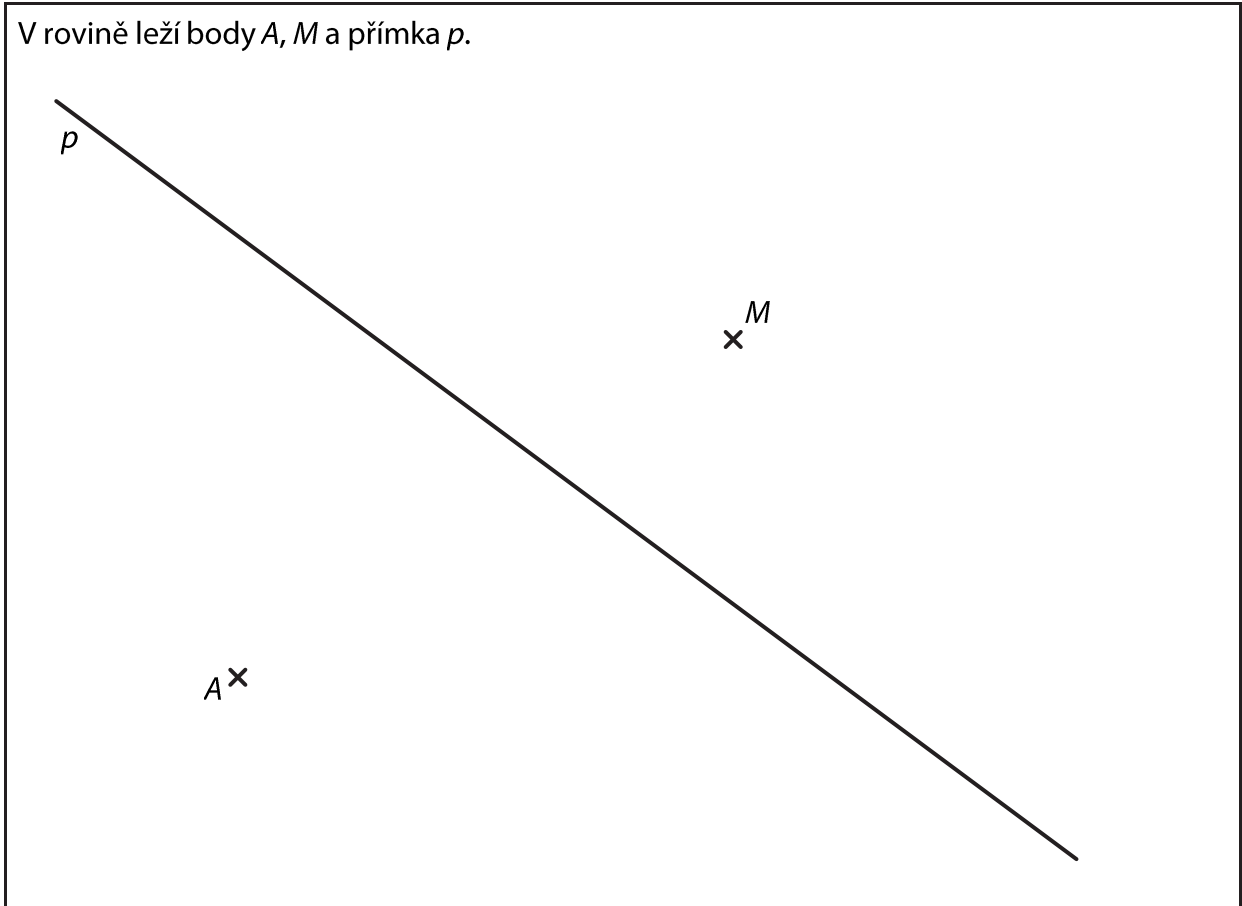
7.1 Zapište předpis funkce  $g$ .

7.2 V kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  sestrojte graf funkce  $g$ .

**V záznamovém archu** obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

## VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 8

V rovině leží body  $A$ ,  $M$  a přímka  $p$ .



**max. 3 body**

- 8** Bod  $A$  je vrchol obdélníku  $ABCD$ .  
Na přímce  $p$  leží úhlopříčka tohoto obdélníku.  
Bod  $M$  leží na hranici obdélníku  $ABCD$ .
- 8.1 Hledáme vrcholy  $B$ ,  $C$ ,  $D$  obdélníku  $ABCD$ .  
Proveďte náčrtek obdélníku  $ABCD$  a запиšte rozbor nebo postup konstrukce.

**V záznamovém archu** obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

8.2 V obrázku sestrojte chybějící vrcholy obdélníku  $ABCD$  a obdélník narýsujte. Najděte všechna řešení.

**V záznamovém archu** obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

**max. 3 body**

**9** V kosočtverci je poměr délky strany ku velikosti výšky 5 : 3.

**Určete poměr délek obou úhlopříček tohoto kosočtverce.**

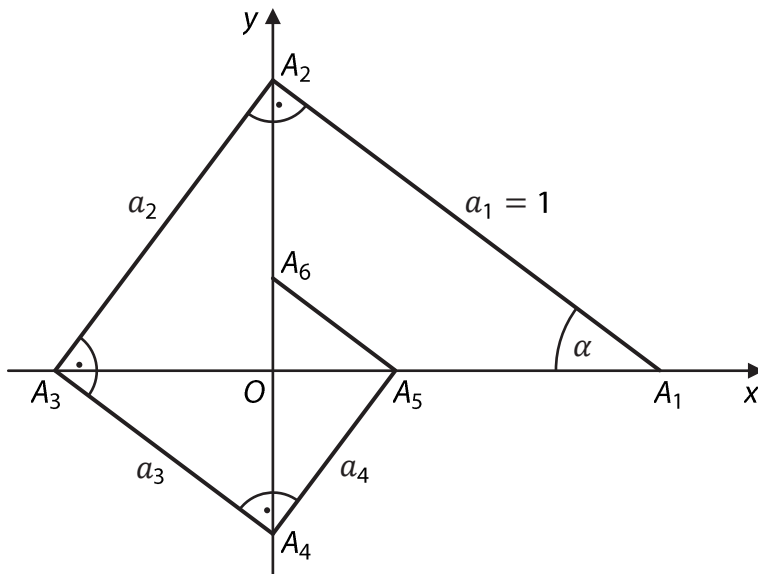
**V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.**



### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK ÚLOZE 10

V kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  je na souřadnicových osách umístěno nekonečně mnoho bodů  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ . Pro body  $A_1, A_2$  platí:  $|A_1A_2| = 1$ ,  $|\sphericalangle A_2A_1O| = \alpha$ , kde  $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ . Úhel  $A_nA_{n+1}A_{n+2}$  je pro každé  $n \in \mathbf{N}$  pravý.

Pro každé  $n \in \mathbf{N}$  označme  $a_n$  vzdálenost bodů  $A_n, A_{n+1}$  (tedy  $a_1 = |A_1A_2| = 1$ ).



max. 4 body

10

10.1 **Vyjádřete** vzdálenost  $a_n$  v závislosti na  $n \in \mathbf{N}$  a velikosti úhlu  $\alpha$ .

10.2 Nekonečná lomená čára  $A_1A_2 \dots A_n \dots$  má délku  $\ell = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ .

**Pro  $\ell = 10$  vypočtete ve stupních velikost úhlu  $\alpha$ .**

Výsledek zaokrouhlete na jedno desetinné místo.

**V záznamovém archu** uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

## VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 11

Desková hra se hraje vždy na 90 kol a v libovolném z nich může hráč začít s těžbou ropy. Začne-li hráč těžít ropu v  $k$ -tém kole ( $k \in \mathbf{N}$ ,  $k \leq 90$ ), vytěží v tomto kole  $k$  barelů ropy. V každém dalším kole vytěží vždy o  $k$  barelů ropy více než v předchozím kole.

Jiným způsobem ve hře těžít ropu nelze.

(Např. hráč, který začne s těžbou ropy v 10. kole, vytěží v 10. kole 10 barelů ropy, v 11. kole pak 20 barelů, ve 12. kole 30 barelů atd.)

**max. 4 body**

**11**

11.1 **Vypočtete**, kolik barelů ropy vytěží za celou hru hráč, který začne s těžbou v 85. kole.

11.2 **Vyjádřete** v závislosti na  $k$ , kolik barelů ropy vytěží za celou hru hráč, který začne s těžbou v  $k$ -tém kole.

**V záznamovém archu** uveďte celý **postup řešení**.

11.3 Dva hráči začali s těžbou ropy ve dvou po sobě jdoucích kolech hry, přitom oba vytěžili za celou hru stejný počet barelů ropy.

**Vypočtete, kolik barelů ropy vytěžil jeden z těchto dvou hráčů.**

**V záznamovém archu uveďte celý postup řešení.**

---

**max. 3 body**

**12** Každá funkce daná některým z následujících předpisů je definována pro všechny přípustné hodnoty  $x \in \mathbf{R}$ .

**Přiřadte ke každému předpisu funkce (12.1–12.3) obor hodnot této funkce (A–F).**

12.1  $y = -x^2 + 3$  \_\_\_\_\_

12.2  $y = -x^{-3} + 3$  \_\_\_\_\_

12.3  $y = x^{-4} + 3$  \_\_\_\_\_

A)  $(3; +\infty)$

B)  $\langle 3; +\infty$

C)  $(-\infty; 3)$

D)  $(-\infty; 3\rangle$

E)  $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$

F) **R**

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 13

V osudí je 12 stejných míčků, každý je označen právě jedním celým číslem. Žádné dva míčky nejsou označeny stejným číslem.

Z osudí táhneme tři čísla, tj. postupně po jednom vylosujeme tři míčky, které nevracíme zpět.

**max. 3 body**

**13 Přiřadte ke každému jevu (13.1–13.3) pravděpodobnost (A–F), s níž jev nastane.**

13.1 Mezi taženými čísly je nejmenší číslo z osudí. \_\_\_\_\_

13.2 Druhé tažené číslo je větší než první a zároveň menší než třetí tažené číslo. \_\_\_\_\_

13.3 Třetí tažené číslo je nejmenší nebo největší z tažených čísel. \_\_\_\_\_

A)  $\frac{2}{3}$

B)  $\frac{1}{3}$

C)  $\frac{1}{4}$

D)  $\frac{1}{6}$

E)  $\frac{1}{12}$

F) jiná hodnota pravděpodobnosti

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 14

V kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  je dán bod  $P[-4; 3]$  a přímka  $o: y = 0,25x$ .  
Bodem  $P$  prochází přímka  $p$ , která je obrazem sebe sama v osové souměrnosti s osou  $o$ .

**2 body**

**14 Která rovnice je rovnicí přímky  $p$ ?**

- A)  $y = -0,25x + 2$
- B)  $y = -4x - 13$
- C)  $y = 0,25x + 4$
- D)  $y = 4x + 19$
- E) žádná z uvedených

---

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15

V kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  jsou dány body  $M[4; -1]$ ,  $N[8; 5]$ .  
Bod  $Y$  leží na souřadnicové ose  $y$  a od obou bodů  $M$ ,  $N$  má stejnou vzdálenost.

**2 body**

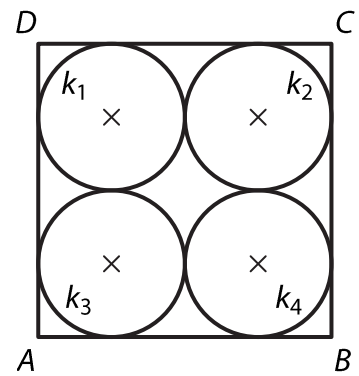
**15 Jaký je obsah trojúhelníku  $MNY$ ?**

- A) 26
- B)  $\sqrt{793}$
- C) 29
- D)  $6\sqrt{26}$
- E) jiný obsah

### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 16

Ve čtverci  $ABCD$  jsou zakresleny čtyři shodné kružnice  $k_1-k_4$  jako na obrázku. Každá kružnice se dotýká dvou stran čtverce a dvou kružnic.

Čtverec  $ABCD$  je umístěn v kartézské soustavě souřadnic  $Oxy$  tak, že platí:  $B[5; -2]$ ,  $D[-3; 6]$ .



**2 body**

**16 Jaká je rovnice kružnice  $k_1$ ?**

- A)  $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$
- B)  $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$
- C)  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$
- D)  $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 13 = 0$
- E)  $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0$

---

### VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 17

Během II. pololetí si oproti I. pololetí tři žáci třídy zlepšili výslednou známku z fyziky o 1 stupeň a dva žáci dokonce o 2 stupně. Ostatní žáci měli z fyziky v I. i ve II. pololetí stejnou známku. Aritmetický průměr výsledných známek z fyziky se tak ve třídě na konci II. pololetí změnil oproti I. pololetí o čtvrt stupně.

**2 body**

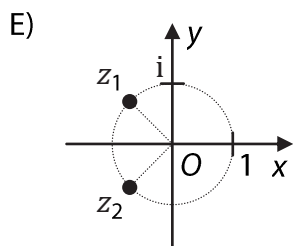
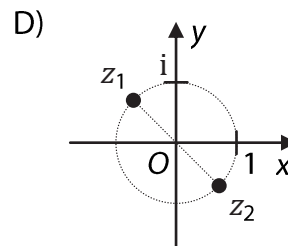
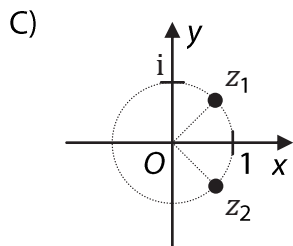
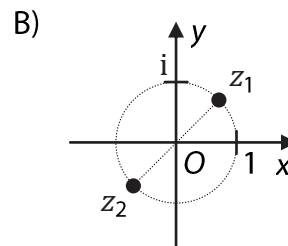
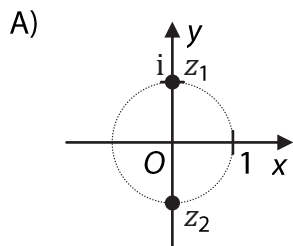
**17 Kolik žáků třídy dostalo na konci II. pololetí známku z fyziky?**

- A) 20 žáků
- B) 24 žáků
- C) 28 žáků
- D) 32 žáků
- E) jiný počet žáků

2 body

- 18 Na jednom z následujících obrázků (A–E) jsou v Gaussově rovině zakresleny obrazy komplexních čísel  $z_1, z_2$ , která jsou kořeny rovnice  $z^2 = -i$ .

**Na kterém obrázku jsou zakresleny obrazy obou kořenů?**



2 body

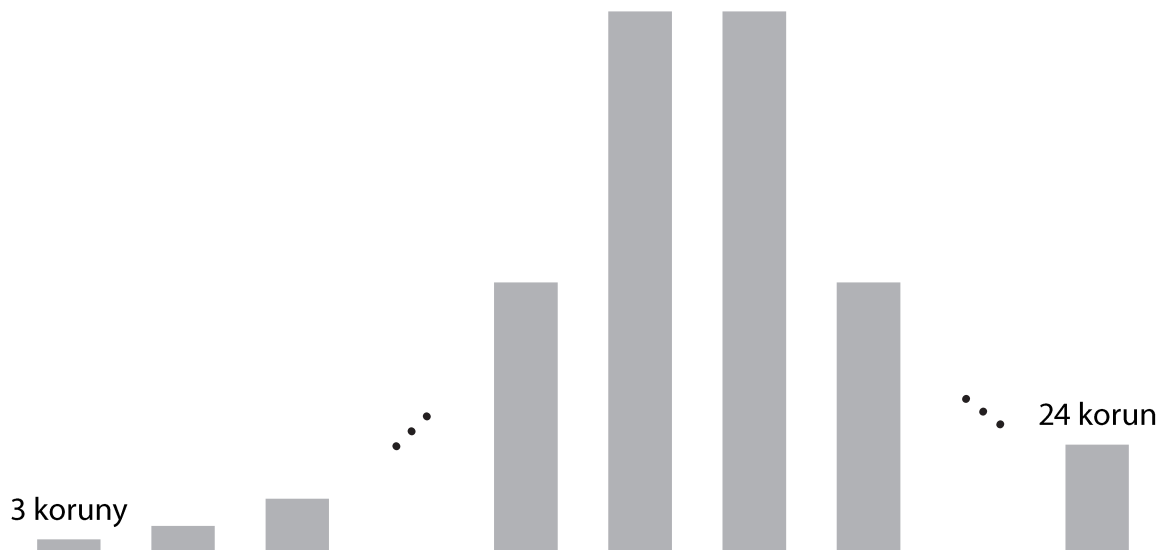
- 19 Pro kterou z následujících soustav nerovnic je množinou všech řešení v oboru  $\mathbb{R}$  prázdná množina?

- A)  $x^2 - 5x + 6 \leq 0 \quad \wedge \quad x^2 > 0$   
B)  $x^2 - 4x + 4 \leq 0 \quad \wedge \quad x^2 \leq 0$   
C)  $(x + 5)^2 \leq 0 \quad \wedge \quad x^2 > 0$   
D)  $x^2 + 4 \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 \leq 0$   
E)  $x^2 - 4 > 0 \quad \wedge \quad x^2 > 0$

## VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 20

Novomanželé poprosili svatební hosty, aby jim při příchodu na hostinu přispěli do kasičky. První host vhodil do prázdné kasičky 3 koruny. Každý další host dal do kasičky dvojnásobek předchozího příspěvku, dokud jeden host neusoudil, že by se kasička mohla brzy přeplnit. Tento host přispěl stejnou částkou jako host před ním a každý další host pak do kasičky dal polovinu předchozího příspěvku. Poslední host přispěl 24 korunami.

Svatební hosté tak vhodili novomanželům do kasičky celkem 12 261 korun.



V grafu je naznačeno, jakými částkami hosté postupně novomanželům přispívali do kasičky.

**2 body**

**20 Kolik svatebních hostů přispělo novomanželům do kasičky?**

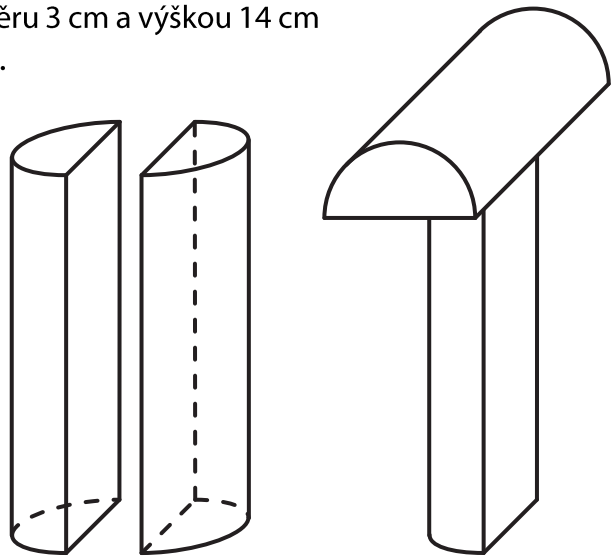
- A) 18 hostů
- B) 19 hostů
- C) 20 hostů
- D) 21 hostů
- E) jiný počet hostů



### VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Dřevěný rotační válec s podstavou o poloměru 3 cm a výškou 14 cm byl osovým řezem rozdělen na dva půlválce.

Jeden z půlválců byl celou plochou horní podstavy přilepen k ploše řezu druhého půlválce (viz obrázek).



**2 body**

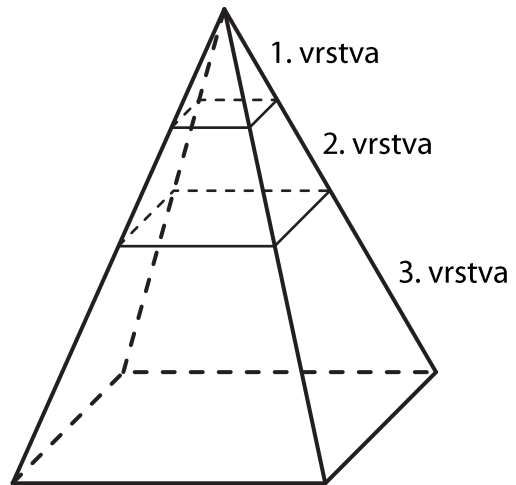
**21 Jaký je povrch slepeného tělesa?**

Výsledek je zaokrouhlen na celé  $\text{cm}^2$ .

- A)  $376 \text{ cm}^2$
- B)  $396 \text{ cm}^2$
- C)  $460 \text{ cm}^2$
- D)  $474 \text{ cm}^2$
- E) jiný povrch

## VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 22

Svíčka tvaru jehlanu se skládá ze tří vrstev s rovnoběžnými podstavami (viz obrázek).  
Výška 2. vrstvy je stejná jako výška 1. vrstvy a výška 3. vrstvy je dvakrát větší než výška 1. vrstvy.



max. 3 body

**22** Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (22.1–22.3), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

22.1 Poměr objemu 1. vrstvy ku objemu celé svíčky je 1 : 64.

A	N
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

22.2 Poměr objemu 1. vrstvy ku objemu 2. vrstvy je 1 : 8.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

22.3 Poměr objemu 2. vrstvy ku objemu 3. vrstvy je 1 : 8.

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

---

**ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.**

---