Geometrická posloupnost

(Opakování)

1. Zjistěte, zda posloupnost $\left(2^{1+n} \cdot 3^{1-n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická či geometrická. Zapište ji rekurentně.

$\left[\text{Posloupnost je geometrická; } a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n,\ a_1 = 4\right]$

2. Je dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, v níž $a_3 = 3,\ a_6 = \frac{1}{9}$. Určete ji, jestliže se jedná o posloupnost
   a) aritmetickou (tj. určete a_1, d), $\left[a_1 = \frac{133}{27}, d = -\frac{26}{27}\right]$
   b) geometrickou (tj. určete a_1, q). $\left[a_1 = 27, q = \frac{1}{3}\right]$

3. Dokažte, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_1 = \sqrt{2},\ a_2 = 2 - \sqrt{2},\ a_3 = 3\sqrt{2} - 4$, je geometrická. Zapište ji vzorcem pro n-tý člen.

$\left[q = \sqrt{2} - 1;\ a_n = \left(\sqrt{2} + 2\right) \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^n\right]$

4. V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_1 = 243,\ q = \frac{1}{3},\ a_n = \frac{1}{9}$. Určete n.

$[n = 8]$

5. V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_n = 1,\ q = \frac{1}{2},\ s_n = 255$. Určete n.

$[n = 8]$

6. Ve čtyřčlenné geometrické posloupnosti je součet krajních členů 45 a součin vnitřních členů 200. Určete tato čtyři čísla.

[5,10,20,40]

7. V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_4 - a_2 = 300,\ a_2 + a_3 = 100$. Kolik členů této posloupnosti dá součet 6 825?

$[a_1 = 5, q = 4, n = 6]$

8. Mezi kořeny logaritmické rovnice $\log(x^2 + 16) = \log x + \log 17$ vložte tři čísla tak, aby spolu s těmito kořeny tvořila prvních pět členů geometrické posloupnosti. Určete vložená čísla.

$[2,4,8;\quad -2,4,-8]$

9. Mezi čísla 2 a 486 vložte tolik přirozených čísel, aby s danými čísly tvořila geometrickou posloupnost a součet vložených čísel byl 240. Určete vložená čísla.

[6,18,54,162]

10. Součet prvních šesti členů geometrické posloupnosti je 182, z toho součet lichých členů je 273. Určete tuto posloupnost.

$\left[a_1 = 243,\ q = -\frac{1}{3}\right]$

11. Do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka o délce odvěsny $a = 2$ je vepsán nový trojúhelník tak, že jeho vrcholy jsou středy stran daného trojúhelníka. Do takto vzniklého trojúhelníka je stejným způsobem vepsán další trojúhelník atd. Vypočtěte
    a) obsah pátého trojúhelníka,
    b) součet obsahů prvních pěti takovýchto trojúhelníků.

$\left[S_5 = \frac{1}{128},\ s_5 = \frac{341}{128}\right]$

12. Původní náklady firmy na inovaci výrobku se každoročně snižují o 10%. Jak byly tyto náklady původně vysoké, jestliže po 13 letech činí 10 168 Kč?

[40 002 Kč]

13. Dle dokumentů Státního zdravotního ústavu bylo zjištěno, že k 31.12.2004 se v České republice vyskytovalo celkem 737 případů HIV pozitivních občanů. Data k 31.12.2010 již ukazovala nárůst na 1522 HIV pozitivních případů (*). Jak velký byl každoroční procentuální nárůst případů HIV?

[12,85 %]

14. Za kolik let vzroste počet obyvatel města z původních 25 000 osob na 33 600 osob, jestliže každoročně přibývají 3% obyvatel?

[za 10 let]

15. Za kolik let se nám v bance při úrokové míře 2,5%, roční úrokovací době a roční dani z úroků 15% náš vklad zvýší o jednu čtvrtinu?

[za 10,6 let]

(*) Dostupné z <http://www.szu.cz/publikace/data>. [cit. 2012-04-18]

Další doporučené úlohy:

- Sýkora,V. a spol. MATEMATIKA: Sbírka úloh pro společnou část maturitní zkoušky – Základní obtížnost. 1.vydání. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, TAURIS, 2001
  Str. 36-39, úlohy 154, 159, 162, 164, 165, 168, 172, 173.
- Sýkora,V. a spol. MATEMATIKA: Sbírka úloh pro společnou část maturitní zkoušky – Vyšší obtížnost. 1.vydání. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, TAURIS, 2001
  Str. 32-34, úlohy132-134, 139-141, 143, 145.
